УДК 519.11

Вознюк О. М., Олійник Б. В., Яворський Р. С.

DOI: https://doi.org/10.18523/2617-7080i2018p6-10

ПЕРІОДИЧНІ БІОТОПНІ ПРОСТОРИ

У статті введено узагальнення біотопної метрики на нескінченний випадок. Побудовано родину періодичних біотопних просторів, елементами яких є періодичні $\{0,1\}$-послідовності, періоди яких є дільниками супернатуральних чисел. Причому введена метрика між двома такими періодичними послідовностями не залежить від вибору спільного періоду. Доведено, що періодичні біотопні простори природним чином параметризуються супернатуральними числами. Точніше, родина цих просторів утворює відносно операції включення решітку, ізоморфну решітці супернатуральних чисел. Кожен із введених таким чином просторів є інваріантним відносно зсуву, тобто зсув є ізометрією для довільного з таких просторів.

Ключові слова: метричний простір, біотопний простір, супернатуральні числа, періодична послідовність, ізометрія.

Вступ

Біотопні простори визначили Едвард Марчевський та Гуго Штейнгауз у праці [1] для потреб математичної біології, а саме для вивчення екосистем. Біотоп (від грецького bios — життя та topos — місце) — відносно однорідна за абіотичними факторами середовища частина геопростору (суходолу або водойми), зайнята певною групою істот. Прикладами біотопів є болото, діброва, печера. Перші згадки про біотопи знаходимо ще у 1866 році в книзі німецького зоолога Ернста Геккеля «Загальна морфологія організмів», у ній він розглядає біотоп як концепцію екосистеми.

Нехай $\mathbb{X}$ — непорожня скінченна множина, A_i, $(i = 1, 2)$ — скінченні підмножини цієї множини $\mathbb{X}$. Множина всіх підмножин $B(\mathbb{X})$ множини з метрикою d, заданою такою рівністю (див. [2]):

$$d(A_1, A_2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } A_1 = A_2 = \emptyset; \\ \frac{|A_1 \oplus A_2|}{|A_1 \cup A_2|}, & \text{якщо } A_1, A_2 \in B(\mathbb{X}) \end{cases} \quad (1)$$

називається біотопним метричним простором.

Біотопну метрику можна визначити також в інший спосіб. А саме: зафіксуємо перелік елементів множини X. Тоді характеристичну функцію кожної скінченної підмножини з X можна задавати булевим вектором, якщо X — скінченна, $|X| = n$, то отримуємо булеві вектори

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

$\alpha_i \in \{0, 1\}, n \geq i \geq 1$, довжини n. Тоді формулу (1) можна переписати в такому вигляді:

$$d_{B_n}((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)) = \\ = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i \oplus \beta_i)}{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i \cup \beta_i)}, \quad (2)$$

де ми використовуватимемо такі позначення:

$$\alpha_i \oplus \beta_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_i = \beta_i; \\ 1, & \text{якщо } \alpha_i \neq \beta_i, \end{cases}$$

та

$$\alpha_i \cup \beta_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_i = \beta_i = 0; \\ 1, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

У статті [3] було запропоновано узагальнення біотопної метрики у випадку, коли X — зліченна множина. А саме: зафіксуємо перелік елементів множини X. Тоді характеристичну функцію кожної скінченної підмножини з X можна задавати нескінченно вимірним булевим вектором

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \quad (\alpha_i \in \{0, 1\}, i \geq 1),$$

лише скінченна кількість координат якого відмінна від нуля. Відстань між такими булевими векторами в біотопному просторі дорівнює відношенню двох чисел: числа координат, якими вони відрізняються, до числа координат, які є не нульовими хоча б для одного з векторів. Побудований у такий спосіб простір називається зліченним біотопним простором. Позначатимемо його $(B(X), d)$ або просто $B(X)$.

У цій статті ми запропонуємо ще одне узагальнення біотопної метрики на нескінченну множину, використовуючи ідеї періодичності, запропоновані в [4] і [5]. Ми побудуємо родину періодичних біотопних просторів, елементами яких є періодичні послідовності, періоди яких є дільниками супернатуральних чисел. Покажемо, що ця родина просторів утворює відносно операції включення решітку, ізоморфну решітці супернатуральних чисел. Також розглянемо деякі властивості цих просторів.

Супернатуральні числа

Для введення поняття супернатурального числа нагадаємо поняття нескінченного добутку послідовності. Нескінченним добутком послідовності є формальний добуток, що задається рівністю:

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot \ldots$$

Це може бути добутком $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots$ або $2^\infty \cdot 3 \cdot 5^\infty \cdot \ldots$ Якщо ми розглядаємо добуток натуральних чисел, то такий добуток прийнято називати супернатуральним числом. Дамо строге означення.

Означення 1. Супернатуральним числом, або числом Стейніца, називається формальний добуток

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{k_p},$$

де $\mathbb{P}$ — множина всіх простих чисел,

$$k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$$

для довільного p, що належить $\mathbb{P}$. Множину всіх супернатуральних чисел позначимо $\mathbb{SN}$. Довільне натуральне число є супернатуральним числом. Елементи множини $\mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$ називають нескінченними супернатуральними числами.

Операція множення, визначена на множині супернатуральних чисел $\mathbb{SN}$, є природнім розширенням операції множення, визначеної на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$: для довільних

$$u = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{k_p} \quad \text{і} \quad v = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{n_p}$$
$$u \cdot v = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{k_p+n_p} = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{m_p},$$

де

$$m_p = \begin{cases} p^{k_p} + p^{n_p}, & \text{якщо } k_p, n_p < \infty; \\ \infty, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

На множині супернатуральних чисел визначено відношення подільності $|$, а саме: супернатуральне число

$$u = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{k_p}$$

ділить супернатуральне число

$$v = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{n_p}$$

$$u \mid v$$

якщо $k_p \leq n_p$, для довільного p, що належить $\mathbb{P}$. При цьому вважається, що символ ∞ більший за всі натуральні числа та нуль. Відношення $|$ є частковим порядком на множині $\mathbb{SN}$. Крім того, частково впорядкована множина $(\mathbb{SN}, |)$ — повна решітка, оскільки для довільної множини чисел можна визначити супремум цієї множини як найменше спільне кратне цих чисел (оскільки ми розглядаємо нескінченні добутки, воно існує), інфімумом буде, очевидно, найбільший спільний дільник цих чисел.

Поповненням решітки $(\mathbb{N}, |)$, з операціями $\wedge$, $\vee$, що визначається як природне розширення операції в решітці $(\mathbb{N}, |)$:

$$u \vee v = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{max\{k_p, n_p\}},$$
$$u \wedge v = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{min\{k_p, n_p\}}.$$

Найбільший елемент решітки:

$$I = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{\infty}.$$

Найменший елемент решітки:

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} p^0 = 1.$$

Подільні послідовності і супернатуральні числа

Нагадаємо означення подільної послідовності.

Означення 2. Послідовність $\alpha = [k_1, k_2, \ldots]$, де $k_i \in \mathbb{N}$, називається строго зростаючою подільною послідовністю натуральних чисел, якщо для довільного $i \geq 1$ виконується співвідношення $k_i \mid k_{i+1}$.

Приклад 1. Послідовність, усі елементи якої є степенями 2: $[2, 4, 6, 8, 16, 32, \ldots]$.

Означення 3. Послідовністю факторів, що відповідає подільній послідовності $[k_1, k_2, \ldots]$, називається послідовність $[m_1, m_2, \ldots]$, елементи якої визначаються таким чином:

$$m_1 = k_1, \quad m_2 = \frac{k_2}{k_1}, \quad m_3 = \frac{k_3}{k_2}, \quad \ldots$$

Означення 4. [5] Характеристикою подільності послідовності називають супернатуральне число:

$$\mathrm{char}(\alpha) = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots$$

Характеристика $\mathrm{char}(\alpha)$ строго зростаючої послідовності α є нескінченним супернатуральним числом. Також слід зазначити, що натуральне число є дільником членів послідовності α тоді і тільки тоді, коли воно є дільником супернатурального числа $\mathrm{char}(\alpha)$.

Приклад 2. Супернатуральне число

$$2 \cdot 3^{\infty}$$

можна записати у вигляді $(2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot 54 \cdot \ldots)$, а тому воно відповідає строго зростаючій послідовності $[2, 6, 18, 54, \ldots]$ з послідовністю факторів $[2, 3, 3, 3, \ldots]$.

Приклад 3. Супернатуральному числу

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots = \prod_{p \in \mathbb{P}} p,$$

де p — просте число, відповідатиме подільна послідовність, що має вигляд:

$$[2, 6, 30, 210, \ldots],$$

яка, своєю чергою, має послідовність факторів

$$[2, 3, 5, 7, \ldots].$$

Періодичні біотопні простори

У цьому розділі ми побудуємо родину біотопних просторів, що природно параметризуються нескінченними супернатуральними числами.

Послідовність $a = (a_1, a_2 \ldots a_n)$ називається періодичною, якщо існує таке натуральне число m, що для всіх $1 \leq i \leq n - m$ виконується рівність $a_i = a_{i+m}$. Число m при цьому називається періодом послідовності a. Нехай u — деяке супернатуральне число. Позначимо символом $B(u)$ множину всіх нескінченних послідовностей $\{0, 1\}$, періоди яких є дільником супернатурального числа u. Такі послідовності будемо називати u-періодичними. Введемо метрику на просторі $B(u)$.

Нехай $\bar{x}$ та $\bar{y}$ — деякі нескінченні $\{0, 1\}$-послідовності з найменшими періодами k та m відповідно, де k, m є дільниками супернатурального числа u.

Позначимо символами $\bar{x}_n$ та $\bar{y}_n$ скінченні вектори, що складаються з перших n координат послідовностей $\bar{x}$ та $\bar{y}$, де

$$n = \text{НСК}(k, m).$$

Тоді покладемо

$$d_B(\bar{x}, \bar{y}) = d_{B_n}(\bar{x}_n, \bar{y}_n),$$

де $d_{B_n}(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ — відстань між $\bar{x}_n$, $\bar{y}_n$ в скінченному біотопному просторі, визначена рівністю (2), тобто відношення кількості попарно різних координат до кількості координат, рівних 1 або для $\bar{x}_n$, або для $\bar{y}_n$.

Означення 5. Простір $B(u)$ назвемо u-періодичним біотопним простором або біотопним простором u-періодичних послідовностей, визначеним на множині нескінченних u-періодичних послідовностей з $\{0, 1\}$.

Твердження 1. *Метрика d_B не залежить від вибору спільного періоду.*

Це твердження можна переформулювати.

Твердження 2. *Для визначення метрики d_B можна брати довільний спільний період послідовностей $\bar{x}$ та $\bar{y}$.*

Оскільки ці два твердження рівносильні, доведемо друге з них.

Доведення. Покладемо k і m — мінімальні періоди послідовностей $\bar{x}$ та $\bar{y}$, $n = \text{НСК}(k, m)$. Тоді число n — мінімальний спільний період для послідовностей $\bar{x}$ та $\bar{y}$. Нехай число l, $l \in \mathbb{N}$, є іншим спільним періодом послідовностей $\bar{x}$ та $\bar{y}$. Тоді існує таке q, $q \in \mathbb{N}$, для якого виконується рівність:

$$l = q \cdot n.$$

Звідси отримуємо ланцюг рівностей:

$$d_B(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sum_{i=1}^{l}(x_i \oplus y_i)}{\sum_{i=1}^{l}(x_i \cup y_i)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \oplus y_i) + \cdots + \sum_{i=q(n-1)+1}^{nq}(x_i \oplus y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i \cup y_i) + \cdots + \sum_{i=q(n-1)+1}^{nq}(x_i \cup y_i)} =$$

$$= \frac{q\sum_{i=1}^{n}(x_i \oplus y_i)}{q\sum_{i=1}^{n}(x_i \cup y_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \oplus y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i \cup y_i)}.$$

Отже, метрика d_B не залежить від вибору спільного періоду, а тому визначена коректно.

Опишемо деякі властивості цього простору.

Твердження 3. *Якщо u — натуральне число, то простір $B(u)$ ізометричний скінченному біотопному простору B_u.*

Доведення цього твердження випливає безпосередньо з означення метрики d_B.

Твердження 4. *Для довільного супернатурального u діаметр простору $B(u)$ дорівнює* 1.

Доведення. З визначення метрики d_B випливає, що відстань між довільними двома точками в періодичному біотопному просторі не може бути більшою від одиниці. Крім того, відстань між послідовностями $\bar{0} = (0, 0, 0, \ldots)$ і $\bar{1} = (1, 1, 1, \ldots)$, які завжди для довільного супернатурального u є точками простору $B(u)$, дорівнює 1, тобто виконується рівність:

$$d_B(\bar{0}, \bar{1}) = 1.$$

Теорема 5. *Для довільного нескінченного супернатурального u довільний скінченний підпростір зліченного біотопного простору $B(X)$ можна ізометрично занурити в простір $B(u)$ всіх періодичних u-послідовностей.*

Доведення. Справді, елементами простору $B(X)$ є нескінченні $\{0, 1\}$-послідовності, що містять тільки скінченну кількість одиниць. Нехай Y — деякий скінченний підпростір $B(X)$. Визначимо правило занурення ϖ для довільної точки x простору $B(X)$. Припустимо, що

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots).$$

Позначимо

$$m = \max_{(x_1,x_2,\ldots,x_k,0,0,\ldots)\in Y} \{k\},$$

тобто всі $\{0,1\}$-послідовності підпростору Y, починаючи з m-ї координати, мають тільки нульові координати. Оскільки u — нескінченне супернатуральне число, то в $B(u)$ існують періодичні послідовності періоду, більшого, ніж m. Нехай l — найменше таке натуральне число, для якого виконуються умови:

$$m \leq l, \qquad m \mid u.$$

Побудуємо занурення

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) = \\ (\underbrace{x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0}_{l}, \underbrace{x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0}_{l}, \ldots).$$

Відображення ϖ є зануренням Y в $B(u)$, крім того, з його побудови і визначення метрики d_B випливає, що воно зберігає відстані, а отже, є ізометричним зануренням.

Твердження 6. *$B(u) \subseteq B(v)$ тоді і тільки тоді, коли $u \mid v$.*

Доведення. Якщо $u \mid v$, то довільний дільник супернатурального числа u є дільником супернатурального числа v. Для довільного супернатурального числа w, такого, що w ділить u, випливає, що w ділить v, звідси, якщо $B(u)$ містить усі послідовності з періодами, які є дільниками супернатурального числа v, отже,

$$B(u) \subseteq B(v).$$

Нехай $B(u)$ містить у собі всі періодичні послідовності, періоди яких є дільниками супернатурального числа v. Оскільки $B(u) \subseteq B(v)$ і $B(u)$ містить усі періодичні послідовності супернатурального числа v, отже, всі дільники супернатурального числа u є дільниками супернатурального числа v.

Теорема 7. *Простори $B(u)$, $u \in \mathbb{SN}$ утворюють відносно включення решітку, ізоморфну решітці супернатуральних чисел.*

Доведення. Для довільного супернатурального числа u позначимо $B(u)$ метричний простір, що є біотопним для $u \in \mathbb{N}$ і періодичним біотопним для $u \in \mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$. Спочатку покажемо, що множина $B(u)$, де $u \in \mathbb{SN}$, відносно операції включення утворює решітку. Відношення включення $B(u) \subseteq B(v)$ є відношенням рефлексивним, симетричним і транзитивним. Крім того, для довільних множин просторів $\{B(u_1), B(u_2), \ldots\}$ точною верхньою гранню цих просторів буде простір $B(u)$, що відповідає супернатуральному числу

$$u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \ldots$$

Найменшою точною гранню буде перетин цих просторів

$$\bigcap_{i \in I} B(u_i).$$

Визначимо відображення $\varphi : B(u) \to u$, $u \in \mathbb{SN}$. Кожному простору $B(u)$ поставимо у відповідність супернатуральне число u. Покажемо, що φ є ізоморфізмом решіток. Для цього потрібно показати, що φ є бієктивним відображенням, і, крім того, для довільних $u, v \in \mathbb{SN}$ виконується співвідношення

$$B(u) \subseteq B(v) \Longleftrightarrow u \mid v. \tag{3}$$

За побудовою періодичних біотопних просторів, для довільного u, що належить $\mathbb{SN}$, простір $B(u)$ однозначно визначається числом u, а тому φ є бієкцією.

З виконання співвідношення (3) випливає твердження 6. Звідси випливає і доведення самої теореми.

Твердження 8. *Зсув σ є ізометрією періодичного біотопного простору.*

Доведення. Покажемо, що σ є ізометрією простору $B(u)$. Тобто, що для довільних послідовностей $\bar{x}$ та $\bar{y}$ простору $B(u)$ — нескінченних періодичних послідовностей — виконується рівність:

$$d_B(\sigma(\bar{x}), \sigma(\bar{y})) = d_B(\bar{x}, \bar{y}).$$

Розглянемо періодичні послідовності зі спільним періодом n

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, \ldots), \\ \bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1, \ldots).$$

Тоді маємо образи при зсуві:

$$\sigma(\bar{x}) = (x_2, \ldots, x_n, x_1 \mid x_2, \ldots), \\ \sigma(\bar{y}) = (y_2, \ldots, y_n, y_1 \mid y_2, \ldots).$$

Очевидно, що відстань між послідовностями залишиться без змін, оскільки кількість попарно різних координат для довільного спільного періоду в цих послідовностях не зміниться, як і кількість координат у спільному періоді, для яких або x_i, або y_i дорівнює 1.

Список літератури

1. Marczewski F. On a central distance of sets and the corresponding distance of functions / F. Marczewski, H. Steinhaus // Colloquium Mathematicum. — 1958. — Vol. 6. — P. 319–327.
2. Deza M. Dictionary of Distances / M. Deza, E. Deza. — Amsterdam : Elsevier, 2006. — 391 p.
3. Олійник Б. В. Група ізометрій нескінченного біотопного простору / Б. В. Олійник // Математичні студії. — 2003. — Т. 20, № 2. — С. 205–209.
4. Cameron P. J. Limits of cubes / P. J. Cameron, S. Tarzi // Topology and its Applications. — 2008. — Vol. 155, iss. 14. — P. 1454–1461.
5. Oliynyk B. V. The isometry groups of the hamming spaces of periodic sequences / B. V. Oliynyk, V. I. Sushchanskii // Siberian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 54, no. 1. — P. 124–136.

O. Vozniuk, B. Oliynyk, R. Yavorskyi

PERIODIC BIOTOPE SPACES

Biotope spaces were introduced by Marchevsky-Steinhaus in [1] for the needs of mathematical biology, namely the study of ecosystems. *Biotope distance* is defined on the set of all subsets of some finite set X. The distance between any subsets A_1 and A_2 of X is calculated by the rule:

$$d(A_1, A_2) = \begin{cases} 0, & \text{if } A_1 = A_2 = \emptyset; \\ \frac{|A_1 \oplus A_2|}{|A_1 \cup A_2|}, & \text{if } A_1, A_2 \in B(\mathbb{X}). \end{cases}$$

We introduce a new generalization of a biotope metric to the infinite case using supernatural or Steinitz numbers. A *supernatural number* (or Steinitz number) is an infinite formal product of the form

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{k_p}$$

where P is the set of all primes and $k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. On the set of all periodic $\{0,1\}$-sequences with the period that is a divisor of some supernatural u; we define the metric d_B for any infinite periodic sequences $\bar{x}$ and $\bar{y}$ by the rule:

$$d_B(\bar{x}, \bar{y}) = d_{B_n}(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$$

where n is a common period of periodic sequences $\bar{x}$ and $\bar{y}$, and the formula $d_B(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ denotes the biotope distance between the first n coordinates of sequences $\bar{x}$ and $\bar{y}$ in the finite biotope metric space B_n. We denote the periodic biotope space that is defined by some Steinitz number u as $B(u)$. If u is a finite Steinitz number, i.e. u is a positive integer, then $B(u)$ is isometric finite biotope space B_u. We also prove that the introduced metric between such two periodic sequences does not depend on a choice of a common period.

A family of such introduced periodic biotope spaces is naturally parametrized by supernatural numbers. More precisely, the family of these spaces forms a lattice that is isomorphic to the lattice of supernatural numbers. Moreover, each of these spaces $B(u)$ is invariant with respect to the shift.

We prove that the diametr of any periodic biotope space equals 1. We also show that any finite subset of a countable biotope space introduced in [3] is isometric embedding in the periodic biotope space $B(u)$ for any u.

Keywords: metric spase, Biotope space, supernatural number, periodic sequence, isometry.

Матеріал надійшов 23.05.2018