УДК 519.1

Матвеєва М. М.

DOI: https://doi.org/10.18523/2617-7080i2018p25-29

СИЛЬНА МЕТРИЧНА РОЗМІРНІСТЬ УНІЦИКЛІЧНИХ ГРАФІВ

Вершина w простого зв'язного графа G сильно розділяє дві вершини u і v цього графа, якщо виконується одна з двох рівностей: $d_G(w,u) = d_G(w,v) + d_G(v,u)$ або $d_G(w,v) = d_G(w,u) + d_G(u,v)$. Множина S найменшої потужності, елементи якої сильно розділяють довільну пару вершин графа G, називається сильним метричним базисом графа G. У загальному випадку пошук сильного метричного базису є NP-важкою проблемою. У цій статті знайдено формулу для обчислення сильної метричної розмірності уніциклічних графів, тобто графів, що мають один цикл.

Ключові слова: метрична розмірність графів, сильна метрична розмірність, дерево, уніциклічний граф.

Вступ

Дослідження, присвячені пошуку метричної розмірності графів, було розпочато у 1975 році, коли Слатер [1] та незалежно від нього у 1976 році Харарі і Мелтер [2] ввели поняття метричної розмірності графів. А основним поштовхом до цього стало питання унікального визначення місцезнаходження «зловмисника» в деякій мережі. Метричні генератори та метрична розмірність знайшли застосування в багатьох сферах: автоматизована навігація, сонари, комбінаторна оптимізація, розпізнавання образів та опрацювання зображень, фармацевтика та хімія.

1979 року Гері та Джонсон у своїй праці [3] показали, що визначення метричної розмірності графа в загальному випадку є NP-важкою проблемою. Тому під час дослідження метричної розмірності графів або досліджували метричну розмірність певної родини графів, наприклад, дерев [4], або була спроба охарактеризувати графи, що мають певні властивості і метрична розмірність яких є певним числом. Так охарактеризовано графи на множині з n вершин, що мають метричні розмірності 1 (ланцюг), $n-1$ (повний граф) та $n-2$ (див. [4; 5]). Опис метричної розмірності уніциклічних графів є також складною задачею. Відомі певні оцінки (див. [6]) і спроби охарактеризувати всі уніциклічні графи, що мають метричну розмірність 2 (див. [7]).

Введено також різні узагальнення поняття метричної розмірності графів, як-от сильна [8] або часткова [9] метричні розмірності графів. У загальному випадку пошук сильної метричної розмірності графів є також NP-важкою задачею (див. [8]).

У цій статті досліджено й охарактеризовано сильну метричну розмірність простого циклу і уніциклічних графів. Задача пошуку сильної метричної розмірності уніциклічних графів виявилась простішою, ніж задача пошуку метричної розмірності уніциклічних графів. Спочатку було знайдено формулу сильної метричної розмірності графів, що є простими циклами, а потім за допомогою цієї формули виведено формулу обчислення сильної метричної розмірності графа, причому описано побудову сильного метричного базису уніциклічних графів. Крім того, доведено, що метрична розмірність дорівнює сильній метричній розмірності дерева тоді і тільки тоді, коли дерево має лише одну внутрішню вершину.

Необхідні визначення

На початку пригадаємо основні означення. У роботі ми будемо досліджувати метричну розмірність простих графів, без кратних ребер і петель, тому використовуватимемо таке означення.

Означення 1. [10] Простим неорієнтовним графом називається $G = (V, E, \delta_E)$, де V — множина вершин, E — множина ребер, $(\delta_E : E \to C_V^2)$.

Граф називається зв'язним, якщо для довільних двох вершин графа існує шлях, що їх з'єднує. Зв'язний граф без циклів називається деревом.

Означення 2. Зв'язний граф, що має лише один цикл, називається уніциклічним.

На рис. 1 зображено приклад графа G, що є деревом, з шістьма вершинами та п'ятьма ребрами.

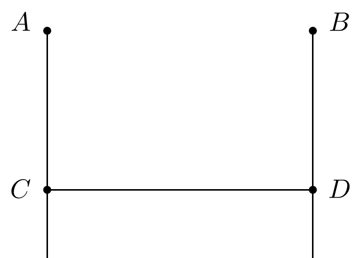

Рис. 1. Граф G

Довільний граф G можна розглядати як метричний простір, визначений на множині вершин

$V(G)$ з метрикою d_G. Метрика d_G між двома довільними вершинами u та v графа G визначається таким чином: якщо $u = v$, то $d_G(u, v) = 0$, інакше $d_G(u, v)$ дорівнює довжині найкоротшого шляху між ними.

Означення 3. [11] Вершина $w \in V$ розділяє дві вершини $u, v \in V$, якщо виконується нерівність:

$$d_G(w, u) \neq d_G(w, v).$$

Множина $S \subset V$ називається метричним генератором для графа G, якщо будь-які дві вершини G розділяються деяким елементом з S. Метричний генератор найменшої потужності називається метричним базисом, а його потужність — метричною розмірністю G.

Метричну розмірність графа G позначатимемо $\dim G$.

Означення 4. [11] Вершина $w \in V$ сильно розділяє дві вершини $u, v \in V$, якщо виконуються такі рівності:

$$d_G(w, u) = d_G(w, v) + d_G(v, u) \qquad \text{або}$$
$$d_G(w, v) = d_G(w, u) + d_G(u, v).$$

Множина $S \subset V$ називається сильним метричним генератором для графа G, якщо будь-які дві вершини G сильно розділяються деяким елементом з S. Сильний метричний генератор найменшої потужності називається сильним метричним базисом, а його потужність — сильною метричною розмірністю G.

Сильну метричну розмірність графа G позначатимемо $\dim_s G$.

Твердження 1. *Для довільного графа G його сильний метричний базис S буде метричним генератором Q.*

Доведення. Нехай маємо граф G з множиною вершин V та довільні вершини $w, u, v \in V$ такі, що $w \neq u \neq v$. За означенням 3 $w \in V$ розділяє $u, v \in \in V$, якщо $d_G(w, u) \neq d_G(w, v)$. З означення 4 маємо такі 2 випадки:

1) $d_G(w, u) = d_G(w, v) + d_G(v, u)$. Отже, маємо, що $d_G(w, u) > d_G(w, v)$, а це означає, що $d_G(w, u) \neq d_G(w, v)$.
2) $d_G(w, v) = d_G(w, u) + d_G(u, v)$. Отже, маємо, що $d_G(w, v) > d_G(w, u)$, а це означає, що $d_G(w, v) \neq d_G(w, u)$.

Отже, якщо множина S задовольняє умови сильного метричного базису, то вона також є метричним генератором Q. А оскільки на S накладається додаткова умова, а саме: вершини $w, u, v \in V$ повинні лежати на одному «шляху», завжди виконуватиметься така нерівність:

$$\dim_s G \geq \dim G.$$

Отже, маємо те, що й треба було довести.

Зауважимо, що обернене твердження до твердження 1 у загальному випадку не є правильним. Тобто не завжди метричний генератор є сильним метричним генератором. Справді, розглянемо такі приклади.

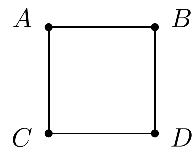

Рис. 2. Простий цикл G

Приклад 1. На рис. 2 зображено простий цикл G. Його сильний метричний базис S складається з 2 вершин — A, B, тобто виконується рівність: $\dim_s G = 2$. А метричний базис також складається з 2 вершин — A, B, тобто $\dim G = 2$. Отже, S буде одночасно й метричним генератором Q графа G, а навіть і метричним базисом. І навпаки — Q буде одночасно й сильним метричним базисом S графа G. Отже, $S = Q$.

Приклад 2. На рис. 1 зображено граф G. Його сильний метричний базис S складається з 3 вершин — A, B, F, тобто $\dim_s G = 3$. А метричний базис складається з 2 вершин — A, B, тобто $\dim G = 2$. Отже, S буде одночасно й метричним генератором графа G.

Метрична розмірність дерев

Внутрішньою вершиною називатимемо вершину, степінь якої більший або дорівнює трьом. Кажуть, внутрішня вершина v близька до листка l, якщо не існує іншої внутрішньої вершини, що розташована на шляху між v та l. Позначимо символом n_v кількість листків, до яких внутрішня вершина v є близькою.

Теорема 2. *Нехай T — дерево. Тоді*

$$\dim_s T = \sum_{v \in V(T)} n_v - 1.$$

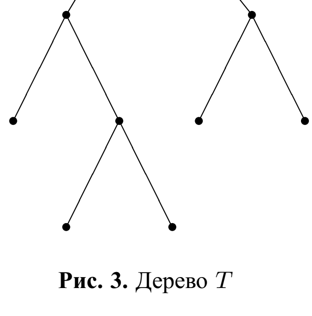

Рис. 3. Дерево T

Доведення. За означенням 4 вершина $w \in V$ сильно розділяє дві вершини $u, v \in V$, якщо

$$d_G(w,u) = d_G(w,v) + d_G(v,u) \qquad \text{або}$$
$$d_G(w,v) = d_G(w,u) + d_G(u,v).$$

Нехай S — сильний метричний базис T. Тому для того, щоб два сусідні листки деякої внутрішньої вершини v сильно розділялися, необхідно і достатньо, щоб хоча б один із них належав S. Отже, виконується нерівність:

$$\dim_s T \geq \sum_{v \in V(T)} (n_v - 1).$$

Зауважимо, що довільний шлях у дереві є підшляхом між двома листками. Тому множина всіх листків є його сильним метричним генератором.

Але такий базис розділятиме два листки різних внутрішніх вершин тільки тоді, якщо хоча б один із них належить S. Тому, застосувавши цю перевірку до всіх листків T та додавши деякі за потреби до S, дійдемо висновку, що

$$\dim_s T = \sum_{v \in V(T)} n_v - 1.$$

Для формулювання наслідку нам буде потрібна теорема, доведена в статті [12].

Теорема 3. *[12] Нехай T — дерево. Тоді*

$$\dim T = \sum_{v \in V(T)} (n_v - 1).$$

Наслідок 4. *Нехай T — дерево. Тоді*

$$\dim_s T = \dim T$$

тоді і тільки тоді, коли T має лише одну внутрішню вершину.

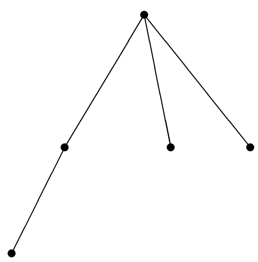

Рис. 4. Дерево T

Доведення. Припустимо, що T — дерево з однією внутрішньою вершиною. Тоді за теоремою 2 маємо таку рівність:

$$\dim_s T = \sum_{v \in V(T)} n_v - 1 = n_v - 1.$$

А з теореми 3 випливає, що

$$\dim T = \sum_{v \in V(T)} (n_v - 1) = n_v - 1.$$

Отже, $\dim_s T = \dim T$.

Покажемо тепер, що якщо внутрішня вершина не є єдиною, то рівності немає. Справді, якщо внутрішніх вершин більше ніж одна, то

$$\dim_s T = \sum_{v \in V(T)} n_v - 1 \neq \dim T = \sum_{v \in V(T)} (n_v - 1).$$

Зауваження. Ця вершина може бути довільного степеня, головне, щоб вона була одна.

Сильна метрична розмірність циклів

Теорема 5. *Нехай G — граф, що є простим циклом, причому $|V(G)| = n$. Тоді*

$$\dim_s G = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Доведення. Необхідність. Якщо u і v — вершини графа, для яких

$$d_G(u,v) = \left[\frac{n}{2}\right],$$

то жодна інша вершина графа, відмінна від u і v, не буде їх сильно розділяти. Отже, одна з них повинна бути в сильному метричному базисі. Ця властивість має виконуватись для всіх «протилежних» вершин, тому виконується нерівність:

$$\dim_s G \geq \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Достатність. Визначимо сильний метричний генератор графа G як $[\frac{n+1}{2}]$ вершин, що йдуть підряд у циклі графа G. Тоді для довільних двох вершин $u, v \in V$, або одна з них є в генераторі, або існує $w \in V$, що їх сильно розділяє за побудовою генератора. Отже, виконується нерівність:

$$\dim_s G \leq \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Отже, маємо рівність:

$$\dim_s G = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Надалі вершини, розташовані на відстані $[\frac{n}{2}]$, називатимемо протилежними.

Лема 6. *З довільних двох протилежних вершин простого циклу G одна має обов'язково міститися в сильному метричному базисі.*

Доведення. З доведення теореми 5 випливає, що протилежні вершини сильно розділятимуться тоді і тільки тоді, коли одна з них належить сильному метричному базису S. Отже, якщо дотримуватися цього правила, то можна побудувати сильний метричний базис графа G.

Сильна метрична розмірність уніциклічних графів

Нехай маємо граф G з множиною вершин V. Внутрішню вершину графа G, що лежить поза циклом, називатимемо *гіллястою вершиною*.

Теорема 7. *Нехай G — уніциклічний граф, причому кількість вершин його циклу дорівнює n. Позначимо внутрішні вершини G, які лежать у циклі, як v_i, їхню кількість — b, а кількість листків, що проектуються в v_i, — l_{v_i}. Тоді виконуються такі твердження:*

1. якщо $b < [\frac{n+1}{2}]$, то

$$\dim_s G = \sum_{i=1}^{b} l_{v_i} - 1 + \left[\frac{n+1}{2}\right] - b;$$

2. якщо $b \geq [\frac{n+1}{2}]$ і з кожних двох протилежних вершин у циклі графа G хоча б одна є внутрішньою, то

$$\dim_s G = \sum_{i=1}^{b} l_{v_i} - 1;$$

3. якщо $b \geq [\frac{n+1}{2}]$ і q — кількість пар протилежних вершин циклу графа G, для яких жодна не є внутрішньою, то

$$\dim_s G = \sum_{i=1}^{b} l_{v_i} - 1 + q.$$

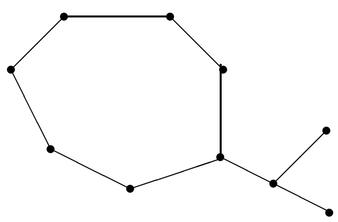

Рис. 5. Випадок 1

Доведення. Розглянемо перший випадок. Проведемо певну аналогію з пошуком метричної розмірності дерев.

Листки, що є близькими одній внутрішній вершині, називатимемо сусідніми. Тоді, щоб довільні два сусідні листки сильно розділялися, необхідно і достатньо, щоб хоча б один із них належав сильному метричному базису S. Отже, застосувавши цю умову до всіх листків графа G, отримаємо таке:

$$\dim_s G \geq \sum_{v \in V} (l_v - 1).$$

Тепер розглянемо листки різних внутрішніх вершин. Щоб два листки різних внутрішніх вершин сильно розділялися, необхідно і достатньо, щоб хоча б один із них належав S. Отже, перевіривши цю умову для всіх листків графа G, отримаємо таку нерівність:

$$\dim_s G \geq \sum_{v \in V} l_v - 1.$$

Побудуємо сильний метричний базис S так, щоб, якщо ріжок не має гіллястої вершини, його листок належав S.

Тепер спроектуємо всі ріжки графа G на його цикл. Отже, отримаємо новий граф G', що є простим циклом з n вершинами. Тоді, якщо листок, що належить деякому ріжку, належить сильному метричному базису S графа G, то і вершина графа G', на котру цей листок був спроектований, належатиме його сильному метричному базису S'. Тоді за теоремою 5 залишається додати стільки вершин, щоб

$$\dim_s G' = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

А ця кількість дорівнюватиме

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] - b.$$

Отже,

$$\dim_s G = \sum_{v \in V} l_v - 1 + \left[\frac{n+1}{2}\right] - b.$$

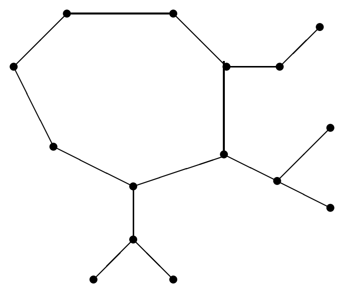

Рис. 6. Випадок 2

Розглянемо другий випадок. З доведення попереднього пункту випливає, що

$$\dim_s G \geq \sum_{v \in V} l_v - 1.$$

А оскільки за умовою теореми для кожної пари протилежних ріжків виконується, що один із них належить сильному метричному базису S, їх розташування задовольняє умови леми 6. А отже,

$$\dim_s G = \sum_{v \in V} l_v - 1.$$

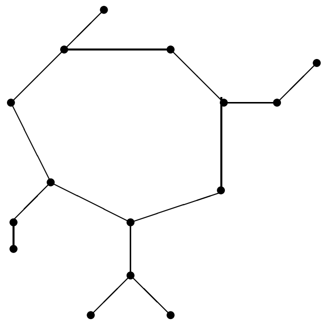

Рис. 7. Випадок 3

Розглянемо третій випадок. За другим пунктом теореми маємо, що

$$\dim_s G \geq \sum_{v \in V} l_v - 1.$$

Але q пар вершин циклу графа G, для яких жодна не є внутрішньою, не задовольнятимуть умови леми 6. Отже, треба додати по одній вершині з цих q пар до сильного метричного базису S. Тоді умови леми 6 буде задовільнено та

$$\dim_s G = \sum_{i=1}^{b} l_{v_i} - 1 + q.$$

Теорему доведено.

Список літератури

1. Slater P. J. Leaves of trees / P. J. Slater // Congressus Numerantium. — 1975. — Vol. 14. — P. 549–559.
2. Slater P. J. On the metric dimension of a graph / P. J. Slater, R. A. Melter // Ars Combinatoria. — 1976. — Vol. 2. — P. 191–195.
3. Garey M. R. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness / M. R. Garey, D. S. Johnson. — New York, NY, USA : W. H. Freeman & Co, 1979. — 338 p.
4. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph / G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, O. R. Oellerman // Discrete Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 105. — P. 99–113.
5. Jannesari M. Characterization of n-vertex graphs with metric dimension $n-3$ / M. Jannesari, B. Omoomi // Mathematica Bohemicas. — 2014. — No. 1. — P. 1–23.
6. Poisson C. The metric dimension of unicyclic graphs / C. Poisson, P. Zhang // J. Combin. Math. Combin. Comput. — 2002. — Vol. 40. — P. 17–32.
7. Dudenko M. On unicyclic graphs of metric dimension 2 / M. Dudenko, B. Oliynyk // Algebra and Discrete Mathematics. — 2017. — Vol. 32, no. 2. — P. 216–222.
8. Oellermann O. R. The strong metric dimension of graphs and digraphs / O. R. Oellermann, J. Peters-Fransen // Discrete Applied Mathematics. — 2007. — Vol. 155. — P. 356–364.
9. Yero I. G. A note on the partition dimension of cartesian product graphs / I. G. Yero, J. A. Rodriguez-Velazquez // Applied Mathematics and Computation. — 2010. — Vol. 217, no. 7. — P. 3571–3574.
10. Боднарчук Ю. В. Основи дискретної математики : навч. посіб. / Ю. В. Боднарчук, Б. В. Олійник. — Київ : Вид. дім «Києво-Могилянська академія», 2007. — 138 с.
11. Kuziak D. On the strong metric dimension of the strong products of graphs / D. Kuziak, I. G. Yero, J. A. Rodriguez-Velayquez // Open Math. — 2015. — Vol. 13. — P. 67–74.
12. Sebo A. On metric generators of graphs / A. Sebo, E. Tannier // Mathematics of Operations Research. — 2004. — Vol. 29, no. 2. — P. 383–393.

M. Matveieva

STRONG METRIC DIMENSIONS OF UNICYCLIC GRAPHS

Let G be a simple connected graph. A metric dimension s of a graph G is the cardinality of the smallest subset S of vertices such that all other vertices are uniquely determined by their distances to the vertices in S. A vertex w of graph G strongly resolves two vertices $u, v \in V(G)$ if one of the equalities hold: $d_G(w,u) = d_G(w,v) + d_G(v,u)$ or $d_G(w,v) = d_G(w,u) + d_G(u,v)$. In other words, a vertex w in a graph G strongly resolves a pair of vertices u, v if there exists a shortest w—u path containing v or a shortest w—v path containing u in G. A set S of minimum cardinality whose elements strongly resolve any pair of vertices of G is called a strong metric basis of graph G. Typical, a metric dimension of a graph G is not equal to a strong metric dimension of a graph G. A metric dimension as a graph parameter and strong metric dimension have numerous applications. In general, a search of metric dimension and strong metric dimension is NP-hard problem. But for some families of graphs, for example, for trees, there is a polynomial algorithm for that searching. This paper characterizes such trees that a metric dimension equals a strong metric dimension.

In this article, we use properties of strong metric basis of trees and cycles to obtain a closed formula for calculating a strong metric dimension of unicyclic graphs, namely graphs that have only one cycle. We say that leaf u which lies out of the cycle is projected onto vertex v that lies in the cycle if $\deg(v) \geq 3$ and v is connected to u through the shortest path. A strong metric dimension depends on the number of inner vertexes of the cycle, their position in it, and the number of leaves that are projected onto each inner vertex of the cycle. Note that now there is no closed formula for calculating metric dimension of unicyclic graphs.

Keywords: metric dimension of a graph, strong metric dimension of a graph, tree, unicyclic graph.

Матеріал надійшов 22.06.2018