УДК 512.6

Ольшевська В. А.

DOI: https://doi.org/10.18523/2617-7080i2018p30-33

АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕНЬ У СИЛОВСЬКИХ 2-ПІДГРУПАХ ЗНАКОЗМІННИХ ГРУП ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ GAP

У статті наведено алгоритм перевірки, чи є певна множина елементів S мінімальною системою твірних для силовської 2-підгрупи знакозмінної групи $Syl_2(A_{2^n})$, за допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP. Для невеликих n ($n = 3$ і $n = 4$) проведено обчислення за допомогою цього алгоритму. Зокрема, перевірено абелевість, пораховано потужність та кількість елементів мінімальної системи твірних комутантів у кожній з груп $Syl_2(A_8)$, $Syl_2(A_{16})$ та фактор-групах цих силовських 2-підгруп по комутанту.

Ключові слова: групи, силовські підгрупи, підстановки, GAP.

Вступ

Силовські p-підгрупи симетричних груп описано в класичних працях професора Калужніна за допомогою розвиненого ним методу задання елементів таких груп за допомогою таблиць, тобто впорядкованих наборів многочленів спеціального вигляду [1]. Дослідженню таких груп та їх узагальнень відтоді присвячено десятки статей (див., напр., [2–4]). Проте досі поза увагою значною мірою залишаються силовські 2-підгрупи знакозмінних груп. Випадок $p = 2$ є єдиним, коли силовська p-підгрупа знакозмінної групи є власною підгрупою відповідної симетричної. І тому її будова та властивості потребують окремого дослідження.

У статті описано алгоритм перевірки, чи задана множина елементів групи є системою твірних для силовської 2-підгрупи знакозмінної групи $Syl_2(A_{2^n})$. Для невеликих n ($n = 3$ і $n = 4$) алгоритм реалізовано за допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP та проведено обчислення. Але вже для $n = 5$ потужності системи не вистачає.

На сьогодні система комп'ютерної алгебри GAP, яка є певним аналогом мови програмування, вважається доволі популярною та широковживаною [5; 6]. Передусім вона слугує допоміжним інструментом для наукових досліджень із різних галузей науки, зокрема й теоретичного характеру. Це зручно, адже вже прописані в системі команди та функції значно пришвидшують розрахунки (див., напр., [7]).

Метою використання GAP у цій праці, окрім перевірки та підтвердження правильності вибору системи твірних для $Syl_2(A_8)$, $Syl_2(A_{16})$, є також перевірка властивостей комутантів цих груп. А саме: перевірка абелевості, потужності та кількості елементів мінімальної системи твірних комутантів груп $Syl_2(A_8)$, $Syl_2(A_{16})$. Аналогічні властивості перевірено для фактор-груп силовських 2-підгруп знакозмінних груп A_8, A_{16} по їхніх комутантах.

Основні означення

Спочатку нагадаємо потрібні нам означення [8; 9].

Означення 1. Нехай G — скінченна група, p — просте число, яке є дільником порядку G. Підгрупи порядку p^t називаються *p-підгрупами*.

Означення 2. Нехай $|G| = p^n s$, де s — деяке натуральне число, що не ділиться на p. Тоді *силовською p-підгрупою* групи G називається така p-підгрупа групи G, що має порядок p^n.

Означення 3. Множина S буде *системою твірних групи* G тоді й лише тоді, коли кожен елемент $g \in G$ можна записати у вигляді

$$g = a_1 a_2 \cdots a_k,$$

де кожен множник a_i належить множині S або є оберненим до елемента з S.

Означення 4. Система твірних S групи G називається *незвідною*, якщо для кожного $a \in S$ множина $S \setminus \{a\}$ не є системою твірних G.

Означення 5. Система твірних S групи G називається *мінімальною*, якщо для довільної множини A, що є системою твірних G, виконується: $|A| \geq |S|$.

Система комп'ютерної алгебри GAP

Загальні характеристики. Систему комп'ютерної алгебри GAP (Groups, Algorithms and Programming) (м. Аахен, Німеччина, 1986 р.) спочатку було розроблено як інструмент комбінаторної теорії груп — розділу алгебри, що вивчає групи, представлені породжуючими елементами та певними співвідношеннями.

На сьогодні система є міжнародним унікальним проектом та об'єднує алгебру, теорію чисел, математичну логіку, інформатику та інші науки. Працює вона в різних версіях Unix/Linux, а також у Windows та MacOS. Проте деякі пакети, наприклад, графічний інтерфейс XGAP, функціонують лише в Unix/Linux.

GAP є системою з вільним доступом, яка постійно вдосконалюється та розширюється. Її ядро написане мовою C, а бібліотека функцій — спеціальною мовою, синтаксис якої є аналогом Pascal та є об'єктно-орієнтовним програмуванням. Користувачі можуть створювати власні програми, а також оформляти власні розробки у вигляді пакета для системи GAP. Окрім того, пакет, затверджений Радою GAP, прирівнюється до наукової публікації.

Операції над групами

1. Нагадаємо, що група підстановок S_8 породжується такою множиною підстановок: $(1,2)$ та $(1,2,3,4,5,6,7,8)$. На мові GAP:

```
gap> s8:=Group((1,2),(1,2,3,4,5,6,7,8));
Group([ (1,2), (1,2,3,4,5,6,7,8) ])
```

   де перший рядок — запит на створення групи, що породжується множиною з двох підстановок, а другий — автоматичне виведення на екран нашого об'єкта.

2. Група S_8 має підгрупу парних підстановок A_8, яка може бути подана як підгрупа з парних підстановок або як її комутант:

```
gap> a8:=DerivedSubgroup(s8);
Group([ (1,2,3), (2,3,4),
  (3,4,5), (2,6)(3,4),
  (3,7)(4,5), (3,5,6,7)(4,8) ])
```

   де перший рядок — функція, що для заданої групи S_8 знаходить її комутант, а другий — автоматичне виведення результату — групи A_8, що є підгрупою S_8.

3. Для зручності можна присвоїти об'єкту ім'я:

```
gap> SetName(a8, "A8");
```

   Після цього кожного наступного разу на екран буде показано не сам об'єкт, а його ім'я:

   `gap> a8;` — вивести на екран об'єкт $a8$
   `A8` — результат на екрані

4. Знайдемо порядок групи A_8:

   `gap> Size(a8);` — запит на розмір групи A_8
   `20160` — результат (розмірність)

Інші операції розглянемо разом із самим алгоритмом.

Алгоритм та його реалізація за допомогою GAP

Відомою є така теорема:

Теорема 1. *Нехай G — група, G' — її комутант. Якщо фактор-групу G/G' не можна породити менше ніж k елементами, то і саму групу G не можна породити менше ніж k елементами.*

Ідея алгоритму полягає в перевірці цієї достатньої умови для системи твірних S силовської 2-підгрупи групи A_{2^n}.

Вхід: S — множина підстановок.

Задача: за допомогою інструментів GAP шляхом порівняння відомих властивостей силовської групи з даною перевірити, чи є S мінімальною системою твірних.

Позначення:

- G — група, яка утворюється множиною S та буде об'єктом дослідження;
- n — кількість елементів множини S;
- Com — комутант групи G;
- $Factor$ — фактор групи G по її комутанту;
- k, i — допоміжні змінні;
- St — система твірних групи A_{2^n};
- Alt — група A_{2^n};
- $Syl2$ — силовська 2-підгрупа групи A_{2^n}.

Ініціалізуємо всі об'єкти, створюємо групу G за системою твірних S та знаходимо розмірність множини S:

```
CMG := function(S)
local G,Com,Faktor,k,i,St,Alt,Syl2;
G:=Group(S); n:=Size(S);
```

Відомо, що множина підстановок вигляду $\{(1,2,3),(1,2,4),\ldots,(1,2,2^n)\}$ є системою твірних групи A_{2^n}. Задамо її мовою GAP за допомогою функції $AddSet$ та позначимо через St:

```
St:=[];
for i in [3,2^n] do
 AddSet(St,(1,2,i));
od;
```

Створимо групу A_{2^n} по системі твірних St, яку позначимо Alt. Також через $Syl2$ позначимо силовську 2-підгрупу групи A_{2^n}:

```
Alt:=Group(St);
Syl2:=SylowSubgroup(Alt,2);
```

Для того щоб група G була силовською 2-підгрупою групи A_{2^n}, треба перевірити такі 2 умови:

1. G є підгрупою A_{2^n}:

```
if not IsSubgroup(Alt,G) then
 Print(S,"is not in Alt(",2^n,")","\n");
 return 0;
fi;
```

2. Потужність групи G збігається з потужністю силовської 2-підгрупи групи A_{2^n}:

```
if Size(G)=Size(Syl2) then
 Print(S,"is generators set of
  SylowSubgroup Alt(",2^n,")","\n");
```

```
17 else
18  Print(S,"is not generators
19                 set ","\n");
20  return 0;
21 fi;
```

Знайдемо комутант групи G та фактор групи G по комутанту:

```
22 Com:=CommutatorSubgroup(G,G);
23 Factor:=FactorGroup(G,Com);
```

Перевіримо на мінімальність систему твірних S відповідно до теореми:

```
24 k:=Minimum(Size(GeneratorsOfGroup
25             (Factor)),Size(S)+1);
26 if k=Size(S) then
27  Print(S,"is min generators set of
28   SylowSubgroup of Alt(",2^n,")");
29 else
30  Print(S,"is not min generators set
31   of SylowSubgroup of Alt(",2^n,")");
32 fi;
```

Додаткові властивості:

- 33–39 — абелевість комутанта групи G;
- 40–41 — потужність комутанта групи G;
- 42–44 — кількість елементів мінімальної системи твірних комутанта групи G;

```
33 if IsAbelian(Com) then
34  Print("CommutatorSubgroup is
35                abelian","\n");
36 else
37  Print("CommutatorSubgroup is not
38                    abelian","\n");
39 fi;
40 Print("Size of CommutatorSubgroup
41                is",Size(Com),"\n");
42 Print("Count of min generatirs set
43        of CommutatorSubgroup is",
44   Size(GeneratorsOfGroup(Com)),"\n");
```

- 45–50 — абелевість фактора групи G по комутанту;
- 51–52 — потужність фактора групи G по комутанту;
- 53–55 — кількість елементів мінімальної системи твірних фактора групи G по комутанту;

```
45 if IsAbelian(Factor) then
46  Print("FactorGroup is abelian","\n");
47 else
48  Print("FactorGroup is not
49               abelian","\n");
50 fi;
51 Print("Size of FactorGroup is",
52              Size(Factor),"\n");
53 Print("Count of min generatirs set
54        of FactorGroup is",
55  Size(GeneratorsOfGroup(Factor)),"\n");
56 end;;
```

Результати GAP для A_8

Розглянемо такі елементи групи $Syl_2(A_8)$:

$$\alpha_0 = (1,5)(2,6)(3,7)(4,8),$$
$$\alpha_1 = (1,3)(2,4),$$
$$\alpha_2 = (1,2)(5,6).$$

За допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP для випадку A_8 було отримано такі результати:

1. Набір елементів α_0, α_1 і α_2 є системою твірних $Syl_2(A_8)$;
2. Комутант групи $Syl_2(A_8)$ породжується підстановками $(1,3)(2,4)(5,7)(6,8)$, $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)(5,8)(6,7)$ і є елементарною абелевою 2-групою порядку 8, тобто ізоморфний C_2^3;
3. Фактор по комутанту групи $Syl_2(A_8)$ також є елементарною абелевою 2-групою порядку 8;
4. Система твірних $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$ є мінімальною.

Властивості комутанта групи. Спираючись на результати GAP для групи $Syl_2(A_8)$, отримано такі теореми:

Теорема 2. *Кожен елемент комутанта групи $Syl_2(A_8)$ є комутатором.*

Доведення. Комутант $Syl_2(A_8)$ складається з елементів

$$\{e, (13)(24)(57)(68), (12)(34), (14)(23)(57)(68), (56)(78), (13)(24)(58)(67), (12)(34)(56)(78), (14)(23)(58)(67)\}.$$

Перевіркою отримаємо таке:

$$\begin{aligned}
(13)(24)(57)(68) &= [\alpha_1, \alpha_0],\\
(12)(34) &= [\alpha_1, \alpha_2],\\
(14)(23)(57)(68) &= [\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_0],\\
(56)(78) &= [\alpha_2, \alpha_0\alpha_1],\\
(13)(24)(58)(67) &= [\alpha_1\alpha_2, \alpha_0\alpha_1],\\
(12)(34)(56)(78) &= [\alpha_2, \alpha_1\alpha_0\alpha_1],\\
(14)(23)(58)(67) &= [\alpha_2\alpha_1, \alpha_0].
\end{aligned}$$

Теорема 3. *Множина комутаторів твірних α_0, α_1, α_2 породжує в комутанті групи $Syl_2(A_8)$ власну підгрупу порядку 4.*

Доведення. З доведення попередньої теореми:

$$[\alpha_1, \alpha_0] = (13)(24)(57)(68),$$
$$[\alpha_1, \alpha_2] = (12)(34),$$
$$[\alpha_0, \alpha_2] = e.$$

Комутант має порядок 8, дільники його порядку: 1, 2, 4, 8. Оскільки отримали лише 2 нетривіальні елементи, то весь комутант породити комутаторами твірних не можна. А отже, вони породжують власну підгрупу порядку 4.

Результати GAP для A_{16}

Розглянемо такі елементи групи $Syl_2(A_{16})$:

$$\alpha_0 = (1,9)(2,10)(3,11)(4,12)$$
$$(5,13)(6,14)(7,15)(8,16),$$
$$\alpha_1 = (1,5)(2,6)(3,7)(4,8),$$
$$\alpha_2 = (1,3)(2,4),$$
$$\alpha_3 = (1,2)(9,10).$$

Для випадку $Syl_2(A_{16})$ за допомогою GAP отримано такі результати:

1. Набір елементів α_0, α_1, α_2 та α_3 є системою твірних $Syl_2(A_{16})$.
2. Комутант $Syl_2(A_{16})$ — не абелева група порядку 2^{10}, що породжується п'ятьма твірними: $(1,4,2,3)(5,6)(9,12)(10,11)$, $(1,4)(2,3)(5,8)(6,7)$, $(1,2)(5,6)$, $(1,7,3,5)\times$ $\times(2,8,4,6)(9,14,12,16)(10,13,11,15)$, $(1,7)\times$ $\times(2,8)(3,6)(4,5)(9,16,10,15)(11,14,12,13)$.
3. Фактор-група $Syl_2(A_{16})$ по її комутанту — абелева група порядку 16, що породжується чотирма елементами.
4. Система твірних $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ групи $Syl_2(A_{16})$ є мінімальною.

Список літератури

1. Калужнин Л. А. Избранные главы теории групп / Л. А. Калужнин. — Киев : Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко, 1979. — 52 с.
2. Dmitruk Y. V. Structure of sylow 2-subgroups of the alternating groups and normalizers of sylow subgroups in the symmetric and alternating groups / Yu. V. Dmitruk, V. I. Sushchanskii // Ukrainian Mathematical Journal. — 1981. — No. 33. — P. 235–241.
3. Bartlomiej P. The action of sylow 2-subgroups of symmetric groups on the set of bases and the problem of isomorphism of their cayley graphs / P. Bartlomiej, V. I. Sushchansky // Algebra and Descrete Mathematics. — 2016. — Vol. 21, no. 2. — P. 264–281.
4. Slupik A. J. Minimal generating set and cayley graphs of sylow p-subgroups of finite symmetric groups / A. J. Slupik, V. I. Sushchansky // Algebra and Descrete Mathematics. — 2009. — No. 4. — P. 167–184.
5. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики / В. В. Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк. — Кривий Ріг : Книжкове видавництво Кирєєвського, 2009. — 324 с.
6. GAP — Groups, Algorithms, and Programming — a system for computational discrete algebra. Version 4.9.3 [Electronic resource]. — 2018. — Mode of access: https://www.gap-system.org. — Title from the screen.
7. А. Б. Коновалов. Система компьютерной алгебры GAP 4.7. Редакция 3.1.2. — 2014. — Режим доступа: http://www.gap-system.org/ukrgap/gapbook/manual.pdf. — Название с экрана.
8. Ленг С. Алгебра / С. Ленг. — Москва : Наука, 1965. — 431 с.
9. Grigorchuk R. I. Automata, dynamical systems, and groups / R. I. Grigorchuk, V. V. Nekrashevich, V. I. Sushchanskii // Steklov Institute of Mathematics. — 2000. — No. 231. — P. 128–203.

V. Olshevska

ALGORITHM FOR CALCULATION IN SYLOW 2-SUBGROUPS OF ALTERNATING GROUPS USING THE COMPUTER ALGEBRA SYSTEM GAP

The Sylow 2-subgroups of symmetric groups was described by Leo Kaluzhnin. He presented the elements of these groups as a tables, i.e. the ordered sets of polynomials of a certain form. The Sylow 2-subgroups of symmetric groups was studied by V. Sushchanskii, Yu. Dmytruk, A. Slupik and other mathematicians. In this paper the Sylow 2-subgroups of alternating groups are characterized. The system of computer algebra GAP was used for this characterization.

System of computer algebra GAP is the most popular frequency of references in scientific publications and the number of links on Internet pages. Its popularity is conditioned by accessibility, large set of functions and packages for calculations in theoretical and mathematical sciences, clarity and ease to use. At the moment, it is an auxiliary tool for working with groups, finite fields, algebraic extension of fields, Galois group, polynomials of many variables, rational functions, vectors, matrices, etc. In addition, this list is supplemented every day.

The CMG-program (Check Minimal Generators) is provided in this article. It is created using the GAP system and is used for calculations in Sylow 2-subgroups of alternating groups. The main task of the program is to check whether some set S can be a system of generators of the Sylow 2-subgroup of alternating group. The program are used for groups $Syl_2(A_8)$ and $Syl_2(A_{16})$. In addition, the commutator and the factor subgroup of these groups are investigated. It is shown that each element of the commutator subgroup of the group $Syl_2(A_8)$ is commutator in this group. Moreover, the subgroup of order 4 of the commutator of the group $Syl_2(A_8)$ is described. Also, this program checks whether the commutators and the factor groups of groups $Syl_2(A_8)$ and $Syl_2(A_{16})$ are Abelian.

Keywords: groups, sylow subgroups, permutations, GAP.

Матеріал надійшов 10.09.2018