УДК 519.1

Прончук Л. С.

DOI: https://doi.org/10.18523/2617-7080i2018p34-37

АНТИПОДАЛЬНІ ГРАФИ ДІАМЕТРА 4

Метричний простір (X, d) називається антиподальним*, якщо для довільної точки x існує таке y, що для довільної точки z множини X виконується рівність $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$. Відомими конструкціями антиподальних графів є графи Хемінга, графи Джонсона, графи вечірки (Coctail-party графи). У статті [1] було побудовано конструкцію антиподальних графів діаметра 3. Використовуючи ідею конструкції Стевановича $P(G)$ з [1], побудовано конструкцію для напівканонічних графів на множині з чотирьох вершин $F(G)$, за допомогою якої можна побудувати антиподальні графи діаметра 4. Оскільки існує всього два напівканонічних графи на множині з чотирьох вершин, побудовано два антиподальних графи діаметра 4. Для кожного з них доведено антиподальність.*

Ключові слова: антиподальний граф, діаметр графа, граф вечірки.

Вступ

У 1968 році Сінглетон [2] запропонував концепцію антиподальних графів графа G, позначених як $A(G)$. Антиподальні графи вперше були описані в 1971 році Д. Х. Смітом [3] та вивчалися в контексті дистанційно-транзитивних графів. Першими відомими прикладами родин антиподальних графів є графи Джонсона, графи вечірки, гіперкуби, причому існує унікальний антиподальний граф діаметра 1, а всі антиподальні графи діаметра 2 є графами вечірки. Антиподальні графи є графами з великою групою автоморфізмів, що є мотивацією до їх вивчення.

У 2001 році Д. Стеванович [1] описав операцію $P(G)$, за допомогою якої будуються всі антиподальні графи діаметра 3, та довів, що $P(G)$ — антиподальний граф, якщо граф G — напівканонічний.

У роботі за певною аналогією з конструкцією Стевановича $P(G)$ побудовано конструкцію для напівканонічних графів на множині з чотирьох вершин $F(G)$, за допомогою якої можна побудувати антиподальні графи діаметра 4. Оскільки існує всього два напівканонічних графи на множині з чотирьох вершин, побудовано два антиподальних графи діаметра 4. Для кожного з них доведено антиподальність.

Необхідні відомості

Метричний простір (X, d) називається *антиподальним* [3], якщо для довільної точки x існує таке y, що для довільної точки z множини X виконується рівність

$$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y).$$

Інакше кажучи, метричний простір (X, d) називається антиподальним, якщо для довільної x існує антипод.

Розглядатимемо тільки прості, неорієнтовні, зв'язні графи без кратних ребер і петель [4].

На довільному графі $G = (V, E)$ можна визначити метрику d_G за таким правилом: для довільних двох вершин u і v графа G відстань $d_G(u, v)$ дорівнює найкоротшому шляху, що їх з'єднує, або 0, якщо $u = v$ [5].

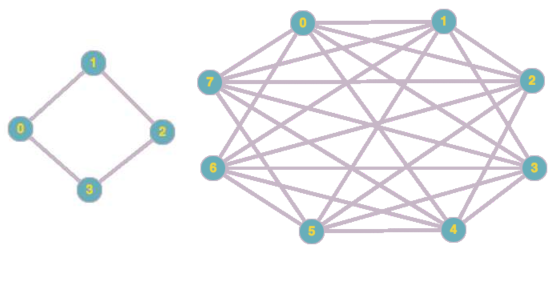
Зв'язний неорієнтовний граф G називається *антиподальним*, якщо метрика d_G на графі G є антиподальною.

Антиподальні графи діаметра 2

Графи вечірки, або гіпероктаедричні графи, складаються із $2n$ вершин та $2n^2 - 2n$ ребер. Вершини такого графа поділені на пари: якщо дві вершини суміжні, тоді не кожна інша вершина суміжна до цих двох, і навпаки, якщо дві вершини між собою не суміжні, тоді кожна вершина графа є суміжною до цих двох.

Ці графи можна також описати в інший спосіб. Граф вечірки H_n можна подати як повний граф K_{2n}, у якого видалили n ребер, що з'єднують попарно різні вершини.

Наведемо деякі приклади графів вечірки:



Твердження 1. *[1] Антиподальними графами діаметра 2 є тільки графи вечірки.*

Антиподальні графи діаметра 3. У статті [1] описано конструкцію $P(G)$, за допомогою якої будуються антиподальні графи діаметра 3. Розглянемо цю конструкцію.

Антиподальний граф графа G, визначений як $P(G)$, має такий самий вершинний набір, що й граф G, дві вершини якого суміжні, якщо відстань між ними дорівнює діаметру графа G.

Припустимо, що $\varphi : V \to V^*$ ізоморфізм графів G і G^*. Тоді для кожної вершини $u \in V(G)$ можна визначити вершину u^* з G^* з деяким фіксованим ізоморфізмом

$$\varphi(u) = u^*.$$

Нехай a і a^* — дві нові вершини, які не належать ні G, ні G^*.

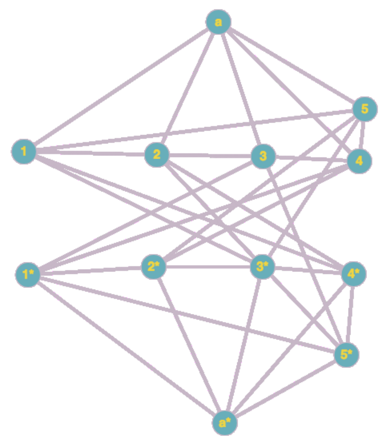
Побудуємо новий граф $P(G)$ таким чином. Множину вершин визначимо як об'єднання множин:

$$V(P(G)) = V(G) \cup V(G^*) \cup [a, a^*],$$

і визначимо множину ребер:

$$\begin{aligned} E(P(G)) = E(G) \cup E(G^*) \cup \\ \cup [(a, u) \mid u \in V(G)] \cup \\ \cup [(a^*, u^*) \mid u^* \in V(G^*)] \cup \\ \cup [(u, v^*) \mid u \in V(G), (u, v) \notin (G), u \neq v]. \end{aligned}$$

Наприклад, проілюструємо конструкцію $P(C_5)$ для циклу C_5.



Приклад 1. Для циклу C_5, який побудований за конструкцією $P(C_5)$, покажемо, яка точка буде антиподальною діаметра 3 до якої точки:

- для вершини 1 антиподальною точкою є 1^*;
- для вершини 2 антиподальною точкою є 2^*;
- для вершини 3 антиподальною точкою є 3^*;
- для вершини 4 антиподальною точкою є 4^*;
- для вершини 5 антиподальною точкою є 5^*;
- для вершини a антиподальною точкою є a^*;
- для вершини 1^* антиподальною точкою є 1;
- для вершини 2^* антиподальною точкою є 2;
- для вершини 3^* антиподальною точкою є 3;
- для вершини 4^* антиподальною точкою є 4;
- для вершини 5^* антиподальною точкою є 5;
- для вершини a^* антиподальною точкою є a.

Отже, як видно, у графа $P(C_5)$ для кожної вершини існує точно одна антиподальна вершина діаметра 3, тому граф є антиподальним.

Для того щоб граф $P(G)$ був антиподальним, потрібно накласти певні обмеження на граф G.

Для довільної вершини u графа G послідовність вершин графа G, які суміжні до u, називають *відкритою околицею* u і позначають $N_G(u)$. Послідовність $N_G[u] = u \cup N_G(u)$ називають *закритою околицею* u графа G. Будемо писати $N(u)$ для $N_G(u)$ та $N[u]$ для $N_G[u]$.

Означення 1. Граф G називають *напівканонічним*, якщо для кожної вершини u графа G виконується нерівність

$$N[u] \neq V(G),$$

крім того, для кожної пари вершин u і v графа G маємо

$$N[u] \neq N[v].$$

Як випливає зі статті [1], всі антиподальні графи діаметра 3 можна описати за допомогою операції $P(G)$, оскільки має місце теорема:

Теорема 2. *[1] Граф H є антиподальним діаметра* 3, *тоді і лише тоді, коли існує напівканонічний граф G такий, що H ізоморфний $P(G)$.*

Антиподальні графи діаметра 4

Використовуючи ідею, запропоновану Стевановичем, побудуємо конструкцію антиподального графа діаметра 4.

Нехай G — напівканонічний граф, множина вершин якого складається з чотирьох точок, тобто $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Припустимо, що G^* — ізоморфний до G. Тоді для кожної вершини $u \in V(G)$ відповідатиме вершина $u^* \in V(G^*)$ з деяким фіксованим ізоморфізмом між G і G^*. Та нехай існують a, a^*, b, c, d, e — нові вершини, які не належать ні G, ні G^*.

Визначимо граф $F(G)$ з множиною вершин

$$V(F(G)) = V(G) \cup V(G^*) \cup \{a, a^*, b, c, d, e\}$$

і множиною ребер

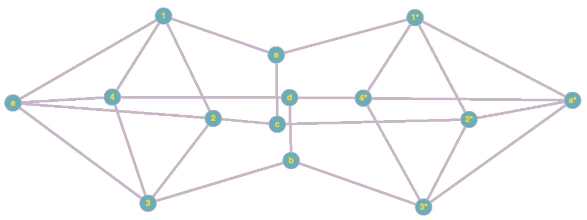
$$\begin{aligned} E(F(G)) = E(G) \cup E(G^*) \cup \\ \cup [(a, u) \mid u \in V(G)] \cup \\ \cup [(a^*, u^*) \mid u^* \in V(G^*)] \cup \\ \cup [(b, d), b \neq d] \cup [(c, e), c \neq e] \cup \\ \cup [(v_{i_1}, b)] \cup [(v^*_{i_1}, b)] \cup [(v_{i_2}, c)] \cup [(v^*_{i_2}, c)] \cup \\ \cup [(v_{i_3}, d)] \cup [(v^*_{i_3}, d)] \cup [(v_{i_4}, e)] \cup [(v^*_{i_4}, e)], \end{aligned}$$

причому вершини $v^*_{i_1}$ і $v^*_{i_3}$ ($v^*_{i_2}$ і $v^*_{i_4}$), що відповідають парі суміжних додаткових вершин b і d (c і e), повинні бути не суміжними (оскільки граф G — напівканонічний, то це можливо).

Теорема 3. *Для довільного напівканонічного графа G, множина вершин якого складається з чотирьох елементів, граф $F(G)$ є антиподальним графом діаметра 4.*

Доведення. Нагадаємо, що існує рівно два напівканонічних графи на множині з чотирьох вершин, це простий цикл довжини 4 і ланцюг. А тому можемо, використовуючи цю загальну конструкцію, побудувати два графи. Покажемо, що кожен із них є антиподальним діаметра 4.

1. Побудуємо наведену вище конструкцію та перевіримо, чи буде граф антиподальним діаметра 4, взявши за основу простий цикл довжини 4 (який є графом вечірки).



Безпосередньо перевіряємо для кожної пари таких вершин.

Для вершини a антиподальною точкою діаметра 4 є a^*.

Для вершини 1 антиподальною точкою діаметра 4 є 3^*. Аналогічно для вершини 3^* антиподом є 1.

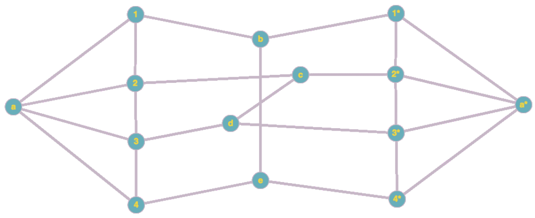
Для вершини 2 антиподальною точкою діаметра 4 є 4^*. Аналогічно для вершини 4^* антиподом є 1.

Для вершини 3 антиподальною точкою діаметра 4 є 1^*. Аналогічно для вершини 1^* антиподом є 3.

Для вершини 4 антиподальною точкою діаметра 4 є 2^*. Аналогічно для вершини 2^* антиподом є 4.

Отже, граф є антиподальним діаметра 4, адже кожна вершина має точно одну антиподальну точку.

2. Побудуємо інший антиподальний граф діаметра 4, використовуючи простий ланцюг.



Для вершини a антиподальною точкою діаметра 4 є a^*. Аналогічно для вершини a^* антиподом є a.

Для вершини 1 антиподальною вершиною діаметра 4 є 3^*. Аналогічно для вершини 3^* антиподом є 1.

Для вершини 2 антиподальною вершиною діаметра 4 є 4^*. Аналогічно для вершини 4^* антиподом є 2.

Для вершини 3 антиподальною вершиною діаметра 4 є 1^*. Аналогічно для вершини 1^* антиподом є 3.

Для вершини 4 антиподальною вершиною діаметра 4 є 2^*. Аналогічно для вершини 2^* антиподом є 4.

Оскільки кожна вершина має антиподальну точку, відстань між якими дорівнює 4, то робимо висновок, що цей граф є антиподальним діаметра 4.

Список літератури

1. Stevanović D. Antipodal graphs of small diameter / D. Stevanović // Filomat. — 2001. — Iss. 15. — P. 79–83.
2. Singleton R. There is no irregular Moore graph / R. Singleton // Amer. Math. Monthly. — 1968. — Vol. 75, iss. 1. — P. 42–43.
3. Biggs N. L. On trivalent graphs / N. L. Biggs, D. H. Smith // Bulletin of the London Mathematical Society. — 1971. — Vol. 3, iss. 2. — P. 155–158.
4. Diestel R. Graph Theory / R. Diestel. — 3rd edition. — Berlin, New York : Springer-Verlag, 2005. — 415 p.
5. Harary F. On the metric dimension of a graph / F. Harary, R. A. Melter // Ars Combin. — 1976. — Vol. 2. — P. 191–195.

L. Pronchuk

ANTIPODAL GRAPHS OF DIAMETER 4

The metric space (X, d) is called *antipodal* if for an arbitrary point x exists the one point y such that for an arbitrary point z of the set X the equality $d(z, x) + d(z, y) = d(x, y)$ holds. In other words, the metric space (X, d) is called antipodal if for an arbitrary x there exists an antipode. For any connected undirected

finite graph G we define the associated graph distance. The distance between two vertices v_1 and v_2 in G equals to the length of the shortest path between v_1 and v_2. A connected undirected finite graph G is called antipodal if its associated graph metric is antipodal. Hamming's graphs, Johnson's graphs and Coctail-party graphs are well-known constructions of antipodal graphs. In particular, the antipodal graphs of diameter 2 only are Cocktail-party graphs. Cocktail-party graph is the graph consisting of two rows of paired vertices in which all vertices but the paired ones are connected with a graph edge.

In the article [1] was characterized antipodal graphs of diameter 3. In this paper was showed that almost every graph is an induced subgraph of some antipodal graph $P(G)$ of diameter 3. The construction $P(G)$ used connected undirected finite semi-canonical graphs.

Using an idea by Dragan Stevanovic from [1], we introduce the construction of graphs which allows to construct antipodal graphs of diameter 4. The basis of this construction is using semi-canonical graphs on a set of four vertices. A graph G is called semi-canonical if for any vertex v of this graph there is at least one vertex u of graph G, such that v and u are not connected by edge. There are only two semi-canonical graphs in a set of four vertices that are C_4 and L_4 the cycle and the path on 4 vertices correspondingly. So, we construct two antipodal graphs of diameter 4. We prove the antipodal of both of these graphs.

Keywords: antipodal graphs, diameter of graph, Coctail-party graph.

Матеріал надійшов 27.06.2018