УДК 519.21

Флоренко А. С., Щестюк Н. Ю., Заєць Н. В.

DOI: https://doi.org/10.18523/2617-7080i2018p49-53

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОБЛАСТІ СПОСТЕРЕЖЕНЬ У ВИГЛЯДІ СИСТЕМИ ВКЛАДЕНИХ ПРЯМОКУТНИКІВ

Досліджено задачу оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(x, y)$ для області K за спостереженнями поля $\xi(x, y)$ в точках $(x, y) \in Z^2 \setminus K$. Знайдено формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної лінійної оцінки функціонала у випадку області спостережень у вигляді системи вкладених прямокутників.

Ключові слова: інтерполяція, спектральна щільність, випадкове поле, оцінка функціонала.

Вступ

Прогнозування стохастичних процесів та оцінювання випадкових полів різної природи набуває дедалі більшого поширення серед науковців різних спеціальностей, виникає нова галузь науки зі своєю специфічною методологією. Розроблення теорії та методів прогнозування та оцінювання випадкових процесів і полів дає змогу уникати дорогих експериментів над об'єктами різної природи, застосування нових технологій і сучасної обчислювальної техніки в цій царині, забезпечує вибір раціонального способу керування процесами. Задачі прогнозування стохастичних процесів та оцінювання випадкових полів знайшли застосування під час розгляду проблем кодування, обробки сигналів радіо-, гідролокації, розпізнавання образів, зображень та під час розв'язання задач прогнозування у фінансовій математиці.

Постановку задачі прогнозування вперше розглянув А. М. Колмогоров [1] для стаціонарних послідовностей [2] за умови, що автоковаріаційна функція цього процесу є заданою. А. Яглом [3] та Н. Вінер розглядали задачі екстраполяції та інтерполяції для випадкових послідовностей і процесів, спектральну щільність яких можна подати у вигляді дробово-раціональної функції.

Окремим напрямом у розвитку теорії інтерполяції випадкових стаціонарних послідовностей і полів стало оцінювання не окремих значень, а лінійних функціоналів від випадкових процесів полів. Цей підхід дав можливість застосування мінімаксного методу до задач інтерполяції. Основні ідеї в цьому напрямку було розвинуто в працях [4–8]. Проте у всіх цих роботах розглядались задачі знаходження оптимальних та мінімаксних оцінок для функціоналів від випадкових полів, що спостерігаються для $D \subset Z^2 \setminus K$, де K за припущенням була замкнена суцільна область «без особливостей». Становить інтерес вивчення закономірностей, що виникають у випадку, коли область K містить «додаткову інформацію» [9]. Випадок знаходження оптимальних оцінок лінійного функціонала від однорідного поля з «додатковою інформацією» у вигляді «перфорованої» площини було досліджено у [10].

У цій праці розглянуто оцінювання невідомих значень поля з «додатковою інформацією» у вигляді системи вкладених прямокутників.

У розділі «Оптимальні оцінки» у випадку відомої спектральної щільності знайдено оптимальні оцінки та середньоквадратичну похибку для області спостережень у вигляді системи вкладених прямокутників.

У розділі «Знаходження оптимальних оцінок функціоналів для щільності, що є добутком авторегресій 1-го порядку» знайдено оптимальні оцінки функціоналів для щільності, що є добутком авторегресій 1-го порядку, та наведено приклад.

Оптимальні оцінки

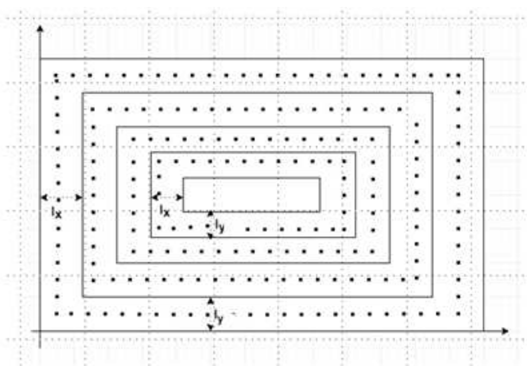

Рис. 1

Нехай $\xi(x, y)$ — однорідне в широкому розумінні випадкове поле, визначене на Z^2, для якого задано структуру залежності у вигляді спектральної щільності. Поле спостерігається для $D \subset Z^2 \backslash K$, де K — замкнена область у вигляді прямокутника, до якої додано додаткову інформацію у вигляді області об'єднання границь прямокутників — $m^x \times m^y$, що утворюють вкладення, звужуючись до центру, причому кількість прямокутників — s, а l_x та l_y позначають відстань між вкладеннями по осях X та Y відповідно (рис. 1).

Область вкладених прямокутників можна описати таким чином:

$$K = \bigcup_{t_1=0}^{s} \bigcup_{t_2=0}^{s} \{m_{t_1}^x \times m_{t_2}^y\}.$$

Розв'яжемо задачу лінійного оптимального оцінювання функціонала

$$\begin{aligned} A_k\xi = &\sum_{(x,y)\in K} a(x,y)\xi(x,y) = \\ &= \sum_{t=0}^{s-1}\Bigg(\sum_{x=2tl_x}^{m_x-2tl_x-1}\Big(a(x,2tl_y)\xi(x,2tl_y) + \\ &+ a(x,m_y-2tl_y-1)\xi(x,m_y-2tl_y-1)\Big) + \\ &+ \sum_{y=2tl_y}^{m_y-2tl_y-1}\Big(a(2tl_x,y)\xi(2tl_x,y) + \\ &+ a(m_x-2tl_x-1,y)\xi(m_x-2tl_x-1,y)\Big)\Bigg) \end{aligned} \quad (1)$$

від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(x,y)$, $(x,y) \in Z^2 \setminus K$. Задача полягає в тому, щоб знайти таке оптимальне значення середньої квадратичної оцінки $\tilde{A}_k\xi$ з класу лінійних функціоналів, яка мінімізує величину середньоквадратичної похибки:

$$\Delta = M|A_k\xi - \tilde{A}_k\xi|^2. \quad (2)$$

Лінійна оцінка $\tilde{A}_K\xi$ функціонала $A_K\xi$ за даними спостереженнями поля $\xi(x,y) \in Z^2 \setminus K$ має вигляд:

$$\tilde{A}_k(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda,\mu) Z_\xi(d\lambda, d\mu),$$

де $Z_\xi(\Delta_1,\Delta_2)$ — ортогональна випадкова міра поля $\xi(x,y)$, $h(\lambda,\mu)$ — спектральна характеристика оцінки $\tilde{A}_K\xi$. Необхідною та достатньою умовою для того, щоб безпомилкова інтерполяція невідомих значень була неможливою, є так звана умова мінімальності [1; 2]:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f_\xi(\lambda,\mu)}\, d\lambda d\mu < \infty, \quad (3)$$

де функція $h(\lambda,\mu)$ повністю визначається двома умовами:

1) $h(\lambda,\mu) \in L_2^{K-}(f_\xi)$
2) $\big(A_k(\lambda,\mu) - h(\lambda,\mu)\big) \perp L_2^{K-}(f_\xi)$
тобто

$$\big(A_k(\lambda,\mu) - h(\lambda,\mu)\big) \perp e^{i(x\lambda+y\mu)}, \quad (x,y) \in K,$$

де

$$A_k(\lambda,\mu) = \sum_{k=(x,y)\in K} a(x,y) e^{i(x\lambda+y\mu)}.$$

Спектральна характеристика обчислюється за формулою:

$$h(\lambda,\mu) = A_k(\lambda,\mu) - \frac{C_K}{f_\xi(\lambda,\mu)}, \quad (4)$$

де

$$C_K = \sum_{k=(x,y)\in K} c(x,y) e^{i(x\lambda+y\mu)},$$

$c(x,y)$ — невідомі коефіцієнти, які визначають оператор $B(\lambda,\mu)$, що визначений у просторі L_2 та представлений матрицею з елементами:

$$B(\lambda,\mu)(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\lambda+y\mu)} \frac{1}{f(\lambda,\mu)}\, d\lambda d\mu, \quad x,y = 0,1,\ldots,$$

які є коефіцієнтами розкладу в ряд Фур'є функції $\frac{1}{f_\xi(\lambda,\mu)}$.

Система рівнянь для знаходження вектора $c(\lambda,\mu)$ має вигляд:

$$a(\lambda,\mu) = B(\lambda,\mu) c(\lambda,\mu),$$

звідки

$$c(\lambda,\mu) = B(\lambda,\mu)^{-1} a(\lambda,\mu),$$

де $a(\lambda,\mu)$ — вектор заданих вагових коефіцієнтів.

Спектральна характеристика $h(\lambda,\mu)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_k\xi$ мінімізує середньоквадратичну похибку:

$$\begin{aligned} \delta(f,g) &= \Delta(h(f,g); f,g) = \\ &= \min_{h\in L_2^{K-}(f,g)} \Delta(h; f,g) = M|A_k\xi - \tilde{A}_k\xi|^2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|C_K(\lambda,\mu)|^2}{f^2(\lambda,\mu)} f(\lambda,\mu) d\lambda d\mu. \end{aligned} \quad (5)$$

Отже, спектральна характеристика оцінки функціонала $A_K\xi$ обчислюється за формулою:

$$h(\lambda,\mu) = A_k(\lambda,\mu) - \frac{1}{f_\xi(\lambda,\mu)} \times \\ \times \sum_{t=0}^{s-1}\Bigg(\sum_{k=2t\cdot l_x}^{m_x-2tl_x-1} \big((B^K)^{-1}\overline{a}_K\big)_{(k,j)} e^{i(k\lambda+j\mu)}\Bigg). \quad (6)$$

Середньоквадратична похибка має вигляд:

$$\Delta(h;f_\xi,f_\mu)=\frac{1}{4\pi^2 f_\xi(\lambda,\mu)^2}\cdot\Big|A_k(\lambda,\mu)f_\xi(\lambda,\mu)-$$
$$-\sum_{t=0}^{s-1}\Big(\sum_{k=2t\cdot l_x}^{m_x-2tl_x-1}\big((B^K)^{-1}\overline{a}_K\big)_{(k,j)}e^{i(k\lambda+j\mu)}\Big)\Big|^2. \quad (7)$$

Спектральна характеристика оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_K\xi$ визначається формулою (6) та мінімізує величину середньоквадратичної похибки (7). Отже, сформулюємо таке твердження.

Твердження 1. *Нехай $\xi(x,y)$ — однорідне випадкове поле, яке має спектральну щільність $f(\lambda,\mu)$, що задовольняє умову* (3). *Спектральну характеристику $h(f)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної оцінки функціонала A_K від невідомих значень однорідного поля $\xi(x,y)$ за даними спостережень поля $\xi(k,j)$ при $(k,j)\in Z^2\setminus K$, де $K=\bigcup_{t_1=0}^{s}\bigcup_{t_2=0}^{s}\{m_{t_1}^x\times m_{t_2}^y\}$, можна обчислити за формулами* (6), (7) *відповідно, де B^K — оператор у просторі, що визначається подвійними матрицями з елементами $B_{k,j}^{l,t}=b(l-k,t-j)$, які є коефіцієнтами Фур'є функції $\frac{1}{f_\xi(\lambda,\mu)}$.*

Знаходження оптимальних оцінок функціоналів для щільності, що є добутком авторегресій 1-го порядку

Нехай задано однорідне випадкове поле — $\xi(x,y)$, що визначене спектральною щільністю $f_\xi(\lambda,\mu)$, та виконується умова мінімальності (3).

Розглядається випадок, коли спектральну щільність задано добутком авторегресій першого порядку [11], та має такий вигляд:

$$f(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)f_2(\mu)=$$
$$=\frac{B_0}{|e^{\lambda i}-\beta_1|^2|e^{\mu i}-\beta_2|^2},$$
$$|\beta_1|<1,|\beta_2|<1, \quad (8)$$

де

$$f_1(\lambda)=\frac{\sqrt{B_0}}{|e^{\lambda i}-\beta_1|^2},$$
$$f_2(\mu)=\frac{\sqrt{B_0}}{|e^{\mu i}-\beta_2|^2}.$$

З твердження 1, оцінки функціонала (1) спектральна характеристика та середньоквадратична похибка обчислюються за формулами (6), (7) відповідно.

Функція $\frac{1}{f(\lambda,\mu)}$ розкладається в ряд коефіцієнтів Фур'є:

$$\frac{1}{f(\lambda,\mu)}=\frac{1}{B_0}\big(|e^{i\lambda}-\beta_1|^2|e^{i\mu}-\beta_2|^2\big)=$$
$$=\frac{1}{B_0}\big((1+\beta_1^2)(1+\beta_2^2)-$$
$$-(1+\beta_1^2)\beta_2e^{-\lambda i}-(1+\beta_1^2)\beta_2e^{\lambda i}-$$
$$-(1+\beta_2^2)\beta_1e^{-\mu i}-(1+\beta_2^2)\beta_1e^{\mu i}+$$
$$+\beta_1\beta_2e^{-i(\lambda+\mu)}+\beta_1\beta_2e^{i(\lambda-\mu)}+$$
$$+\beta_1\beta_2e^{i(-\lambda+\mu)}+\beta_1\beta_2e^{i(\lambda+\mu)}\big). \quad (9)$$

Введемо позначення:

$$-(1+\beta_1^2)\beta_2=A, \qquad -(1+\beta_2^2)\beta_1=D,$$
$$\beta_1\beta_2=B, \qquad (1+\beta_1^2)(1+\beta_2^2)=E.$$

Звідси функція (9) матиме такий вигляд:

$$\frac{1}{f(\lambda,\mu)}=\frac{1}{B_0}\big(E+Ae^{-i\lambda}+Ae^{i\lambda}+$$
$$+De^{-i\mu}+De^{i\mu}+Be^{i(-\lambda+\mu)}+$$
$$+Be^{i(\lambda-\mu)}+Be^{-i(\lambda+\mu)}+Be^{i(\lambda+\mu)}\big). \quad (10)$$

Наслідок. *Якщо спектральна щільність представлена добутком авторегресій першого порядку у вигляді* (8), *то спектральну характеристику $h(f)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A_K(\xi)$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(x,y)$ при $(x,y)\in Z^2\setminus K$, де $K=\bigcup_{t_1=0}^{s}\bigcup_{t_2=0}^{s}\{m_{t_1}^x\times m_{t_2}^y\}$, можна обчислити за формулами* (6), (7), *де B_K — оператор у просторі, що визначається матрицею з елементами, що набуває вигляду:*

$$\begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & V_n\end{pmatrix},$$

де

$$V_n=\begin{pmatrix} V_D & 0 & 0 & D\\ 0 & V_A & 0 & 0\\ 0 & 0 & V_D & 0\\ D & 0 & 0 & V_A\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$V_D=\begin{pmatrix} V_d & 0\\ 0 & V_d^{cross}\end{pmatrix},$$
$$V_A=\begin{pmatrix} V_a & 0\\ 0 & V_a^{cross}\end{pmatrix}.$$

Підматриці V_d, V_a, V_d^{cross}, V_a^{cross} мають такий вигляд:

$$V_d=\begin{pmatrix} D & E & D & 0 & 0\\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & D & E & D\end{pmatrix},$$
$$V_a=\begin{pmatrix} A & E & A & 0 & 0\\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & A & E & A\end{pmatrix},$$

$$V_d^{cross} = \begin{pmatrix} D & E & D & B & 0 \\ 0 & D & \ddots & A & 0 \\ 0 & B & A & E & A \end{pmatrix},$$

$$V_a^{cross} = \begin{pmatrix} A & E & A & B & 0 \\ 0 & A & \ddots & D & 0 \\ 0 & B & D & E & D \end{pmatrix}.$$

Розмірність підматриць V_n рівна кількості невідомих точок прямокутника — $m_x \times m_y$, а кількість підматриць V_n рівна кількості вкладень — s.
Приклад 1. Нехай спостерігається випадкове поле $\xi(x, y)$ без шуму при $Z^2 \setminus K$ у точках множини $x \in Z\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $y \in Z\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (рис. 2). Кількість вкладень $s = 2$. Проміжки між вкладеннями задаються $l_x = l_y = 1$.

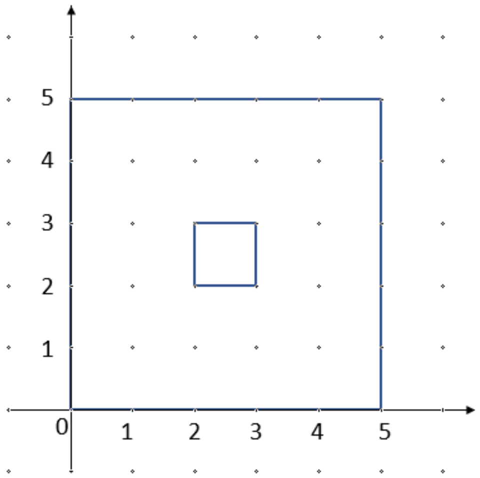

Рис. 2

У цій задачі спектральна щільність відома та задається добутком авторегресій першого порядку:

$$f(\lambda, \mu) = f_1(\lambda) f_2(\mu),$$

де

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|1 - ae^{-\lambda i}|^2}, \quad |a| < 1,$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|1 - de^{-\mu i}|^2}, \quad |d| < 1.$$

Знайдемо оцінку функціонала:

$$\begin{aligned} A_k \xi = \sum_{t=0}^{1} \Bigg(\sum_{k=2t}^{4-2t} \Big(& a(k, 2t)\xi(k, 2t) + \\ & + a(k, 4-2t)\xi(k, 4-2t) \Big) + \\ & + \sum_{j=2t}^{4-2t} \Big(a(2t, j)\xi(2t, j) + \\ & + a(4-2t, j)\xi(4-2t, j) \Big) \Bigg). \end{aligned} \tag{11}$$

Спектральну щільність можна записати у вигляді (8). Матриця має вигляд:

$$\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix},$$

де

$$V_1 = \begin{pmatrix} E & D & 0 & \dots & 0 & D \\ D & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & E & D & 0 & 0 \\ 0 & B & D & E & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & D \\ D & 0 & 0 & 0 & D & E \end{pmatrix},$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} E & A & B & D \\ A & E & D & B \\ D & B & E & A \\ D & B & A & E \end{pmatrix}$$

Спектральну характеристику оцінки функціонала $h(\lambda, \mu)$ знаходять за формулою (7) та записують у вигляді функціонала:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_K \xi = & \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda, \mu) Z_\xi(d\lambda, d\mu) = \\ & = \sum_{y=-1}^{6} \xi_{-1,y}\gamma_{-1,y} + \sum_{y=-1}^{6} \xi_{6,y}\gamma_{6,y} + \\ & + \sum_{x=0}^{5} \xi_{k,-1}\gamma_{k,-1} + \sum_{x=0}^{5} \xi_{k,6}\gamma_{k,6} + \\ & + 2\sum_{y=1}^{4} \xi_{1,y}\gamma_{1,y} + 2\sum_{y=1}^{4} \xi_{4,y}\gamma_{4,y} + \\ & + \xi_{1,-1}\gamma_{1,-1} + \xi_{1,6}\gamma_{1,6} + \\ & + \xi_{4,-1}\gamma_{4,-1} + \xi_{4,6}\gamma_{4,6} + \\ & + 2\xi_{2,1}\gamma_{2,1} + 2\xi_{2,4}\gamma_{2,4} + \\ & + 2\xi_{3,1}\gamma_{3,1} + 2\xi_{3,4}\gamma_{3,4} \end{aligned}$$

коефіцієнти $\gamma_{x,y}$ — обчислені невідомі кофіцієнти $C(x, y)$.

Неважко помітити, що для оцінки функціонала з невідомих значень випадкового поля використовувалися лише значення в сусідніх точках (крапках). Це природно, тому що ми розглядали випадкові поля автоматичної регресії першого порядку для кожного аргументу. Середня квадратна помилка може бути розрахована за формулою (7) після обчислення вектора.

Надалі варто розглянути мінімаксний метод для розглянутих областей «спеціального вигляду».

Список літератури

1. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей / А. Н. Колмогоров // Изв. АН СССР. — 1941. — Т. 2 : Сер. мат., № 1. — С. 3–14.
2. Колмогоров А. Н. Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве / А. Н. Колмогоров // Бюллетень МГУ. — 1941. — Т. 2 : Математика, № 6. — С. 1–40.
3. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций / А. М. Яглом // Успехи математических наук. — 1952. — № 5. — С. 3–168.
4. Моклячук М. П. Об оценке функционала от случайного поля / М. П. Моклячук // Теория вероятностей и математическая статистика. — 1982. — № 27. — С. 110–116.
5. Моклячук М. П. Оцінки функціоналів від випадкових полів : монографія / М. П. Моклячук, Н. Ю. Щестюк. — Ужгород : АУТДОР-ШАРК, 2013. — 228 с.
6. Moklyachuk M. P. On robust estimates of random fields / M. P. Moklyachuk, N. Y. Shchestyuk // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky. Kyiv. Univ. im. Tarasa Shevchenka. — 2003. — No. 5. — P. 32–41.
7. Moklyachuk M. P. Extrapolation of random fields observed with noise / M. P. Moklyachuk, N. Y. Shchestyuk // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauk. — 2003. — No. 4. — P. 12–17.
8. Moklyachuk M. P. Robust estimates of functionals of homogeneous random fields / M. P. Moklyachuk, N. Y. Shchestyuk // Theory of Stochastic Processes. — 2003. — Vol. 9, no. 25. — P. 101–113.
9. Щестюк Н. Ю. Проблеми прогнозу випадкових полів для деяких областей спеціального вигляду / Н. Ю. Щестюк // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. — 2007. — № 12. — С. 280–283.
10. Moklyachuk M. P. Interpolation problems for random fields in perforated plane / M. P. Moklyachuk, N. Y. Shchestyuk, A. S. Florenko // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. — 2016. — No. 14. — P. 83–97.
11. Ширяев А. Н. Вероятность — 1 / А. Н. Ширяев. — Москва : МЦНМО, 2004. — 574 с.

A. Florenko, N. Shchestyuk, N. Zaets

INTERPOLATION PROBLEMS FOR RANDOM FIELDS FROM OBSERVATIONS IN AREAS THAT REPRESENT A SYSTEM OF EMBEDDED RECTANGLES

Forecasting of static processes and estimation of random fields of a different nature is becoming more widespread among scientists of different specialties, and a new branch of science appears with its specific methodology. That problems of estimation of the unknown values of random fields are generalization of problems of extrapolation, interpolation and filtering of stochastic processes. The study of the dependence of the obtained formulas on the geometry and the number of embeds are the topical problems in the field of the forecasting theory, in geology, geodesy, and some other directions. The methods of solution of linear estimation problems for stochastic processes and random fields were developed by A. M. Kolmogorov [2], A. M. Yaglom [3]. Traditional methods of solution of these problems are employed under the condition that spectral densities are known exactly. The case of estimating the unknown values of a random field for an area that represents a system of embedded rectangles is of interest in the study of random fields with peculiarities.

The problem is the estimation of linear functionals which depend on the unknown values of a homogeneous random field $\xi(x, y)$ in the region K from observations of $\xi(x, y)$ at points $(x, y) \in Z^2 \setminus K$, where K is a region that represents the union of the edges of the rectangles $m_x \times m_y$, with the number of rectangles — s_x, l_x and l_y spaced between the attachments on the X and Y axes, respectively. That is, we find a value $\tilde{A}_k\xi$ from the class of linear functionals, which minimizes the value of the mean square error

$$\Delta = M|A_k\xi - \tilde{A}_k\xi|^2.$$

To solve this problem, we used a classical method of projections in the Hilbert space. Formulas for calculating the mean square errors and the spectral characteristics of the optimal linear estimate of functionals are derived in the case when the areas of observations represent a system of embedded rectangles.

Keywords: interpolation, spectral density, random field, estimation of a functional.

Матеріал надійшов 11.06.2018