УДК 512.5

Петрук В. О.

DOI: https://doi.org/10.18523/2617-70803202048-52cs

ЧИСЛО ФОРСУВАННЯ В НУЛЬ ДЕЯКИХ РОДИН ГРАФІВ

Статтю присвячено дослідженню числа форсування в нуль деяких родин графів. Концепція форсування в нуль є порівняно новою темою досліджень у дискретній математиці, яка вже має певні практичні застосування, зокрема, число форсування в нуль використовується у дослідженнях мінімального рангу матриць суміжних графів. Також процес форсування в нуль є одним із прикладів процесів поширення на графах. Такі процеси часто використовують для моделювання технічних або соціальних процесів і в інших сферах: в статистичній механіці, фізиці, аналізі соціальних мереж тощо.

Нехай вершини графа G вважатимуться білими, за винятком певного набору S чорних вершин. Ми перефарбуємо вершини графа з білого в чорний, використовуючи певне правило, а саме

Правило зміни кольору: *Біла вершина стає чорною, якщо це єдина біла вершина, що прилягає до чорної вершини.*

[5] Число форсування в нуль $Z(G)$ графа G — це мінімальна потужність набору чорних вершин S, необхідних для перетворення всіх вершин графа G на чорні за скінченну кількість кроків за допомогою «правила зміни кольору».

Відомо [10], що для будь-якого графа G його число форсування в нуль не може бути меншим за мінімальну степінь вершин. Такі та інші вже відомі факти стали основою пошуку числа форсування в нуль для двох наступних родин графів:

Граф-шестерня*, що позначається $W_{2,n}$, — це граф, отриманий шляхом вставки додаткової вершини між кожною парою сусідніх вершин по периметру графа колеса W_n. Таким чином, $W_{2,n}$ має $2n+1$ вершин і $3n$ ребер.*

Граф-призма*, що позначається Y_n, або в загальному випадку $Y_{m,n}$, іноді його також називають круговою драбиною, — це граф, що відповідає скелету n-призми.*

Граф-колесо*, що позначається W_n, — це граф, утворений шляхом приєднання однієї (центральної) вершини до всіх вершин циклу довжиною n.*

У цій статті розглядаються визначення, доведення та деякі приклади числа форсування в нуль та процесу форсування в нуль родини графів-шестерень та родини графів-призм.

Ключові слова: число форсування в нуль, граф-шестерня, граф-призма.

Процес форсування в нуль — це зразок процесу поширення на графах (зокрема приклад стільникового автомата). Такі процеси є цікавими не тільки з точки зору математичних та інформатичних досліджень, їх використовують для моделювання технічних чи суспільних процесів також в інших сферах: статистичній механіці, фізиці, аналізі соціальних мереж тощо.

В роботі обчислюється число форсування в нуль для двох родин графів: шестерень і призм.

Число форсування в нуль

Нехай вершини графа G вважаються білими, окрім визначеної множини S чорних вершин.

Будемо перефарбовувати вершини графа з білого кольору в чорний, використовуючи певне правило.

Правило зміни кольору: біла вершина перетворюється на чорну за умови, якщо вона є єдиною білою вершиною-сусідом чорної вершини.

Означення 1. Числом форсування в нуль $Z(G)$ графа G є мінімальна розмірність множини чорних вершин S, необхідних, аби перетворити усі вершини графа G на чорні за скінченну кількість кроків із застосуванням «правила зміни кольору» [5].

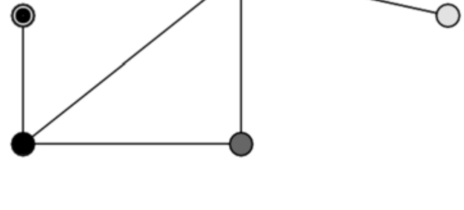


Рис. 1. Процес форсування в нуль графа G

Рівняння та нерівності

Розглянемо відомі нерівності й оцінки для числа форсування в нуль $Z(G)$ графа.

1. [9] Для будь-якого непорожнього графа G
$$1 \le Z(G) \le \big|V(G)\big| - 1.$$
2. [10] Для будь-якого графа G
$$\delta(G) \le Z(G),$$
де $\delta(G)$ — мінімальна степінь вершин графа.
3. [8] Якщо S множина чорних вершин, необхідних для форсування в нуль графа G, тоді її доповнення $\overline{S}$ також буде достатньо для форсування в нуль графа G.
4. [11] Якщо граф G має унікальний набір вершин для форсування в нуль, тоді граф G не має ребер; тобто G складається з ізольованих вершин.
5. [8] Для двох графів G і H таких, що $H \subset G$, точно визначити $Z(G)$ з $Z(H)$ як і $Z(H)$ з $Z(G)$ неможливо. Однак справедливо таке:
Теорема 1. *Нехай G будь-який граф. Тоді*
а) Для $v \in V(G), Z(G) - 1 \le Z(G - \{v\}) \le Z(G) + 1$.
б) Для $e \in E(G), Z(G) - 1 \le Z(G - e) \le$ $\le Z(G) + 1$.

Граф-шестерня

Означення 2. Граф-шестерня (або Gear Graph) — це граф, що містить цикл порядку $2n$, кожна друга вершина циклу якого з'єднана із ще однією вершиною в центрі (див. рис. 2).

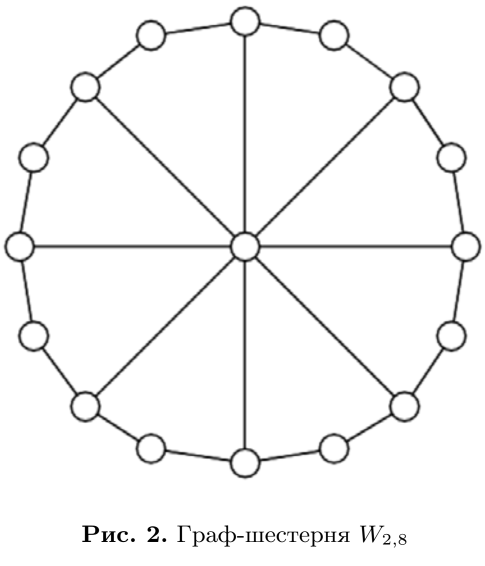


Рис. 2. Граф-шестерня $W_{2,8}$

Граф-шестерню позначають $W_{2,n}$. Він має $2n + 1$ вершину і $3n$ ребер.

Теорема 2. *Число форсування в нуль графа-шестерні*
$$Z(W_{2,n}) = 3$$

Доведення. По-перше, зауважимо, що в [10] доводиться нерівність $Z(G) \ge \delta(G)$, де $\delta(G)$ — мінімальний степінь вершин графа. А тому має місце нерівність $Z(W_{2,n}) \ge 2$.

Спочатку покажемо, що число форсування в нуль для довільного графа-шестерні не дорівнює двом. Справді, припустимо, що дві вершини перетворюють весь граф на чорний. Це не можуть несуміжні вершини, оскільки тоді у кожної з цих вершин буде не єдиний білий сусід. Тому вершини мають бути суміжними, причому суміжними вершинами в циклі, тобто вершини степеня 2 і степеня 3 у циклі (див. рис. 3).

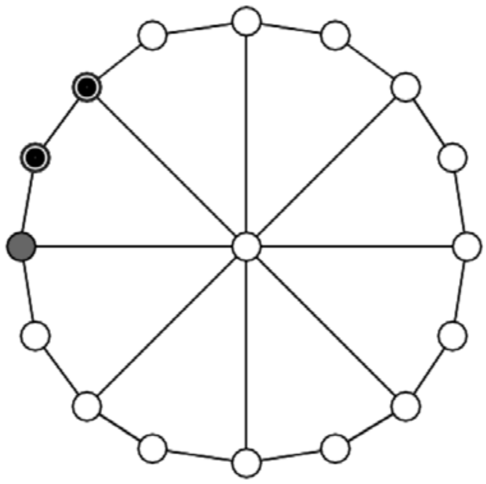


Рис. 3

Але тоді другий сусід вершини степені 2 не перетвориться на чорну вершину, оскільки з будови графа-шестерні сусіди вершини степеня 2 мають степінь три, тобто у білого сусіда чорної вершини степеня 2 буде два білих сусіди. Отже вона і всі інші вершини графа-шестерні залишаться білими. Таким чином $Z(W_{2,n}) \ne 2$.

Тепер покажемо, що трьох чорних вершин достатньо для перефарбування графа в чорний колір. Справді, зафарбуємо центральну вершину і дві суміжні вершини циклу (див. рис. 4). Тоді білими залишаються решта вершин циклу. Для сусідньої з чорною вершини вона — єдиний білий сусід. Отже, за правилом перефарбування графа вона стає чорною. Так поступово всі вершини графа можна перефарбувати в чорний колір. І теорему доведено.

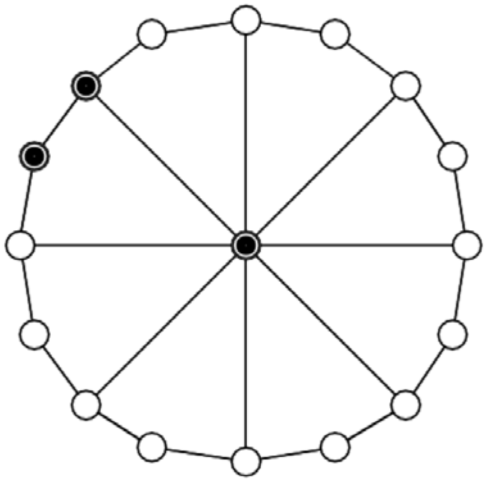
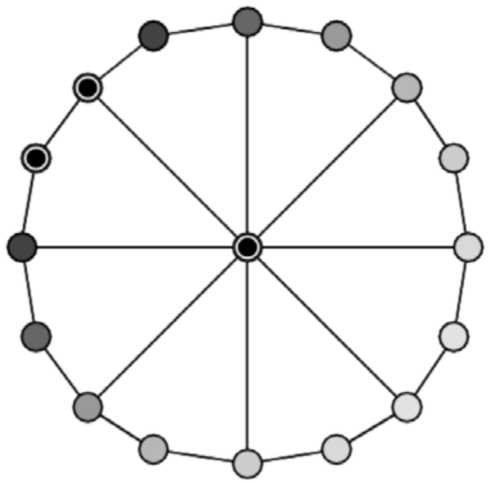


Рис. 4

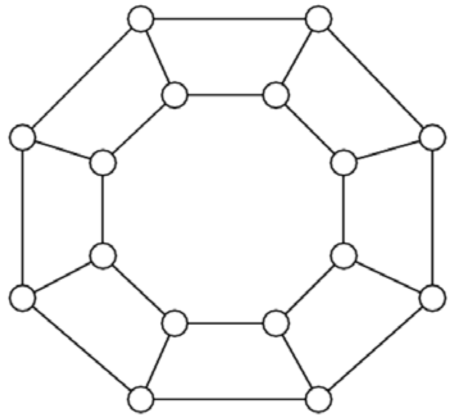
Приклад 1. Процес форсування в нуль графа-шестерні $W_{2,8}$.

[htp]



Граф-призма

Означення 3. Prism Graph (або граф-призма) — це граф, що визначає скелет призми з n гранями. Його також іноді називають круговою драбиною (circular ladder).



[htp]

Рис. 5. Y_8

Зазвичай позначають Y_n або в загальному випадку $Y_{m,n}$.

Граф Y_n ізоморфний декартовому добутку графів $P_2 \times C_n$, а в загальному випадку $Y_{m,n} = P_m \times C_n$.

Теорема 3. *Число форсування в нуль графа-призми*

$$Z(Y_n) = 4,$$

при $n \geq 3$.

Доведення. По-перше, $Z(G) \geq \delta(G)$, де $\delta(G)$ — мінімальний степінь вершин графа [10], тобто $Z(W_{2,n}) \geq 3$.

Спочатку покажемо, що число форсування в нуль довільного графа-призми не дорівнює трьом. Від супротивного, припустимо, що три вершини перетворюють весь граф на чорний. Оскільки степінь кожної вершини графа-призми дорівнює трьом, то чорними мають бути дві вершини-сусіди деякої білої вершини. Але тоді інший спільний сусід чорних вершин має бути чорним. У останньої вершини два чорні сусіди і один сусід білий. Отже, можна перефарбувати цього білого сусіда. Але тоді приходимо до ситуації, коли три чорні вершини, суміжні з однією чорною вершиною, мають по два білі сусіди, бо степінь кожної вершини графа призми дорівнює три. Причому у графа-призми сусіди однієї вершини не поєднані між собою ребрами, тому перефарбування зупиниться (див. рис. 6).

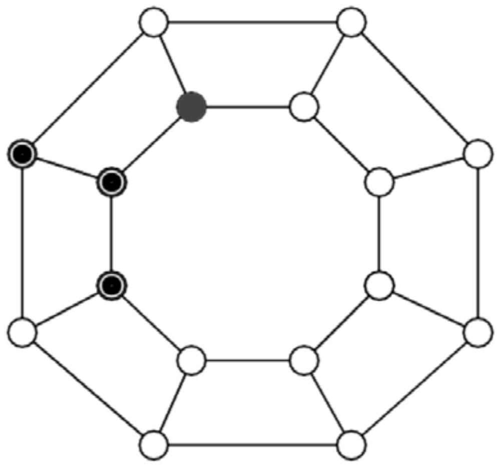


Рис. 6

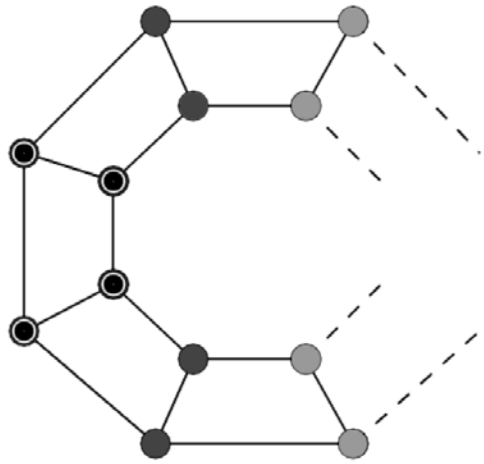


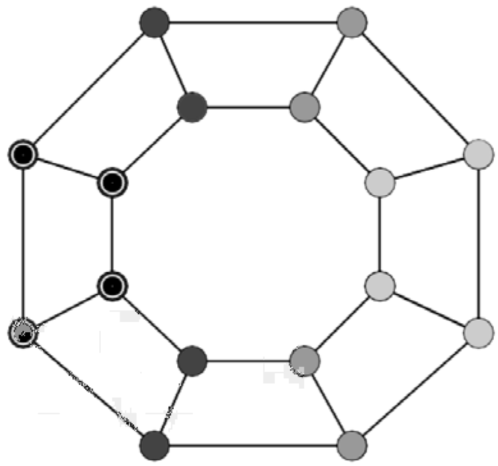
Рис. 7

Тепер покажемо, що для будь-якого графа-призми $Y_n, (n > 3)$ виконується рівність $Z(Y_n) = 4$.

Нехай пофарбованими у чорний вершинами будуть по дві сусідні із внутрішнього та зовнішнього циклів (див. рис. 7). Такого розташування чорних вершин достатньо для перефарбовування графа-призми незалежно від довжини цих циклів. Справді, сусідньою з чорною вершиною внутрішнього циклу буде біла вершина, яка є єдиним сусідом чорної вершини внутрішнього циклу. Отже, її можна перефарбувати в чорний колір. Аналогічно для вершини, що є білим сусідом чорної вершини зовнішнього циклу. Рухаючись таким чином, за скінченну кількість кроків увесь граф-призма стане чорного кольору, оскільки на кожному кроці ми матимемо однакову ситуацію, за якої у чорних вершин кожного з циклів є лише по одному білому сусіду (див. рис. 7).

Отже, $Z(Y_n) = 4$ і теорему доведено.

Приклад 2. Процес форсування в нуль призми Y_8



References

1. F. Harary and R. A. Melter, "On the the metric dimension of a graph", Ars Combinatoria. **2**, 191–195 (1976).
2. S. Khuller, B. Raghavachari and A. Rosenfeld, "Landmarks in graphs", Disc. Appl. Math. **70**, 217–229 (1996).
3. B. Shanmukha, B. Sooryanarayana and K. S. Harinath, "Metric dimension ofWheels", Far East J. Appl. Math. **8** (3), 217–229 (2002).
4. C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, C. Seara, J. Caceres and M. L. Puertas, "On the metric dimension of some families of graphs", Electronic Notes in Discrete Mathematics. **22**, 129–133 (2005).
5. Linda Eroh, Cong X. Kang and Eunjeong Yi, "A Comparison between the Metric Dimension and Zero Forcing Number of Trees and Unicyclic Graphs", Acta Mathematica Sinica, English Series Jun. **33** (6), 731–747 (2017).
6. Thomas Kalinowski, Nina Kamcev and Benny Sudakov, *Zero forcing number of graphs* (2017). Retrieved from arXiv:1705.10391v2[math.CO].
7. Shannon Dillman and Franklin Kenter, *Leaky Forcing: A New Variation of Zero Forcing* (2019). Retrieved from arXiv:1910.00168v1[math.CO].
8. Kiran B. Chilakamarri, Nathaniel Dean, Cong X. Kang and Eunjeong Yi, *Iteration Index of a Zero Forcing Set in a Graph* (2011). Retrieved from arXiv:1105.1492v1[math.CO].
9. Fatemeh Alinaghipour Taklimi, *Zero Forcing Sets for Graphs* (2013). Retrieved from arXiv:1311.7672v1 [math.CO].
10. A. Berman, S. Friedland, L. Hogben et al., "An upper bound for the minimum rank of a graph", Linear Algebra Appl. **429**, 1629–1638 (2008).
11. F. Barioli, W. Barrett, S. M. Fallat, H. T. Hall, L. Hogben, B. Shader, P. van den Driessche and H. van der Holst, "Zero forcing parameters and minimum rank problems", Linear Algebra and its Applications. **433**, 401–411 (2010).

V. Petruk

ZERO FORCING NUMBER OF SOME FAMILIES OF GRAPHS

The work is devoted to the study of the zero forcing number of some families of graphs. The concept of zero forcing is a relatively new research topic in discrete mathematics, which already has some practical applications, in particular, is used in studies of the minimum rank of the matrices of adjacent graphs. The zero forcing process is an example of the spreading process on graphs. Such processes are interesting not only in terms of mathematical and computer research, but also interesting and are used to model technical or social processes in other areas: statistical mechanics, physics, analysis of social networks, and so on. Let the vertices of the graph G be considered white, except for a certain set of S black vertices. We will repaint the vertices of the graph from white to black, using a certain rule.

Colour change rule: A white vertex turns black if it is the only white vertex adjacent to the black vertex.

[5] The zero forcing number $Z(G)$ of the graph G is the minimum cardinality of the set of black vertices S required to convert all vertices of the graph G to black in a finite number of steps using the "colour change rule".

It is known cite 10 that for any graph G, its zero forcing number cannot be less than the minimum degree of its vertices. Such and other already known facts became the basis for finding the zero forcing number for two given below families of graphs:

A **gear graph**, denoted $W_{2,n}$ is a graph obtained by inserting an extra vertex between each pair of adjacent vertices on the perimeter of a wheel graph W_n. Thus, $W_{2,n}$ has $2n+1$ vertices and $3n$ edges.

A **prism graph**, denoted Y_n, or in general case $Y_{m,n}$, and sometimes also called a circular ladder graph, is a graph corresponding to the skeleton of an n-prism.

A **wheel graph**, denoted W_n is a graph formed by connecting a single universal vertex to all vertices of a cycle of length n.

In this article some known results are reviewed, there is also a definition, proof and some examples of the zero forcing number and the zero forcing process of gear graphs and prism graphs.

Keywords: zero forcing number, gear graph, prism graph.

Матеріал надійшов 16.08.2020