УДК 519.17

Соболєв В. О., Соломко В. О.

DOI: https://doi.org/10.18523/2617-70804202124-27

ПОБУДОВА ПАРИ КОСПЕКТРАЛЬНИХ 5-РЕГУЛЯРНИХ ГРАФІВ, ОДИН З ЯКИХ МАЄ ДОСКОНАЛЕ ПАРУВАННЯ, А ІНШИЙ – НІ

У цій статті розглядаються тільки прості неорієнтовні графи. Проблема пошуку досконалого парування у довільному простому графі є відомою і популярною в теорії графів. Її застосовують у різноманітних сферах, таких як хімія, комбінаторика, теорія ігор тощо. Паруванням M у простому графі G називають множину попарно несуміжних ребер, тобто таких, що не мають спільних вершин. Парування називають досконалим, якщо воно покриває усі вершини графа, тобто кожна з вершин графа інцидентна рівно одному з ребер у досконалому паруванні. За теоремою Кеніга, регулярні дводольні графи додатного степеня завжди мають досконале парування. Проте графи, які не є дводольними, потребують додаткових досліджень. Мультимножину власних значень матриці суміжності називають спектром графа. Окремою цікавою задачею теорії графів є пошук попарно неізоморфних коспектральних графів, тобто неізоморфних графів з однаковим спектром. У цьому напрямі проводились дослідження щодо пошуку конкретних конструкцій коспетральних пар графів. Крім того, цікавими є знаходження коспектральних графів, які мають додаткові властивості, наприклад, знаходження коспектральних графів, для одного з яких існує досконале парування, а для другого — ні.

Блазік, Камінгс і Гамерс дослідили, що для кожного $k \geq 5$ існує пара коспектральних зв'язних k-регулярних графів, де один має досконале парування, а інший — ні. При доведенні цієї теореми автори використали конструкцію перемикання Годзіла–Маккея. За допомогою цієї конструкції у нашій роботі покроково описано побудову пари коспектральних зв'язних 5-регулярних графів. Для одного з побудованих графів існує досконале парування, яке наведене в цій статті. Для другого побудованого графа досконалого парування не існує. Побудовані графи мають 42 вершини і складаються з 5 блоків, що з'єднані між собою мостами. За допомогою комп'ютерних засобів обчислено спектр побудованих графів. Таким чином перевірено, що пара справді є коспектральною.

Ключові слова: коспектральні графи, регулярний граф, досконале парування, перемикання Годзіла–Маккея.

Вступ

Проблема пошуку досконалого парування у довільному графі є досить поширеною і досліджується у різноманітних сферах, де використовується теорія графів, наприклад, у хімії, комбінаториці та окремих галузях теорії ігор. За теоремою Кеніга, регулярні дводольні графи додатного степеня завжди мають досконале парування. Для регулярних недводольних графів існує достатня умова існування досконалого парування (див. [1]). Тоді, з урахуванням того, що за спектром можна визначити дводольність і регулярність графа (див. [2]), природним є запитання, чи можна за спектром регулярного графа визначити існування в ньому досконалого парування. Оскільки існують неізоморфні регулярні зв'язні графи, які є коспектральними, залишається дослідити парування у регулярних графах з однаковими спектрами. Проте, як виявляється, існують і такі коспектральні пари регулярних графів, у яких один з графів має досконале парування, а інший – ні.

Основні твердження

Нагадаємо основні означення.

Означення 1. Паруванням M у графі G називають множину попарно несуміжних ребер, тобто таких, що не мають спільних вершин.

Означення 2. Досконале парування – парування, що покриває усі вершини графа. Кожна з вершин графа інцидентна рівно одному з ребер у досконалому паруванні.

Дослідження існування неізоморфних коспектральних k-регулярних графів для $k \leq 2$ проводилося у роботі [2]. Для $k \leq 2$ не виявлено таких графів.

Для кубічних графів немає перемикання Годзіла–Маккея між графами з та без досконалого парування. Тому нічого не можна сказати про існування коспектральних пар для таких графів. Недослідженим залишається і питання щодо існування неізоморфних коспектральних 4-регулярних графів.

Для $k \geq 5$ у роботі [3] доведено існування пари неізоморфних коспектральних графів з та без досконалого парування.

Теорема 1. *Для кожного $k \geq 5$ існує пара коспектральних зв'язних k-регулярних графів, де один має досконале парування, а інший – ні.*

Найменший приклад – це пара 5-регулярних коспектральних графів. Далі побудовано приклад такої пари, який ґрунтується на результатах, отриманих Годзілом та Маккеєм (див. [4]).

Твердження 2. *Нехай G – граф, а X, Y – розбиття множини вершин. Припустимо, що X індукує регулярний підграф, а кожна вершина $y \in Y$ суміжна з 0, $\frac{|X|}{2}$ або $|X|$ вершин X. Побудуємо із G новий граф G' таким чином. Для кожної вершини $y \in Y$, що суміжна з $\frac{|X|}{2}$ вершинами в X, видалимо $\frac{|X|}{2}$ ребер між y та X і приєднаємо y до інших $\frac{|X|}{2}$ вершин X. Тоді G та G' будуть коспектральними.*

Побудова

Крок 1. Почнемо з побудови незв'язного об'єднання 2 шляхів P_2 та одного шляху P_3. Граф H_5 є доповненням цього об'єднання та не має досконалого парування (рис. 1).

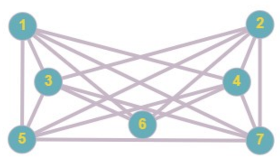

Рис. 1. Граф H_5

Крок 2. Вершина під номером 6 має степінь 4, а інші мають степінь 5. Далі приєднуємо до вершини 6 ребро з висячою вершиною 8 і назвемо отриманий граф $\tilde{H}_5$ (рис. 2). Граф $\tilde{H}_5$, на відміну від H_5, має декілька досконалих парувань, кожне з яких містить ребро $(6, 8)$. Наприклад, множина ребер $N = \{(1, 5), (2, 3), (4, 7), (6, 8)\}$ є досконалим паруванням. Надалі така вершина 8 позначатиметься як v.

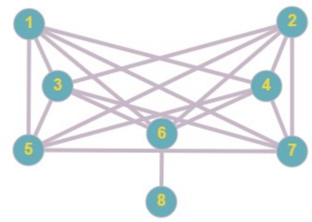

Рис. 2. Граф $\tilde{H}_5$

Крок 3. Надалі набори вершин X, Y будуть позначати набори при перемиканні Годзіла–Маккея (див. твердження 2). Визначимо граф набору перемикання X як $K_3 \cup C_5$. Далі будуємо граф Y, створивши 3 копії графа $\tilde{H}_5$. Множину копій вершин v трьох графів позначимо як W. Кожну вершину $w \in W$ приєднаємо до 4 вершин з X таким чином, щоб вершина w була суміжною із кожною вершиною трикутника і жодні дві вершини більшого циклу не відрізнялися степенями більше, ніж на одиницю (рис. 3). Позначимо цей граф G_1.

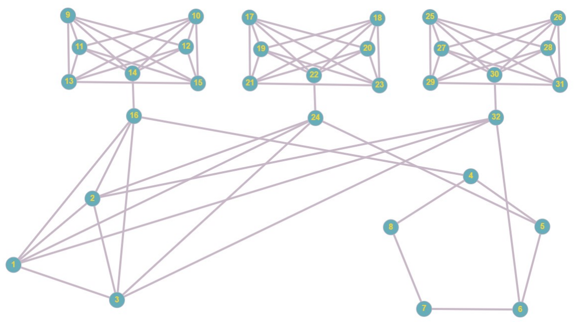

Рис. 3. Граф G_1

Крок 4. До отриманого графа додаємо ще одну копію графа $\tilde{H}_5$ і з'єднуємо його вершину v з 4 вершинами, що належать більшому циклу в X так, щоб степені вершин більшого циклу відрізнялися не більше ніж на одиницю (рис. 4). Позначимо цей граф G_2.

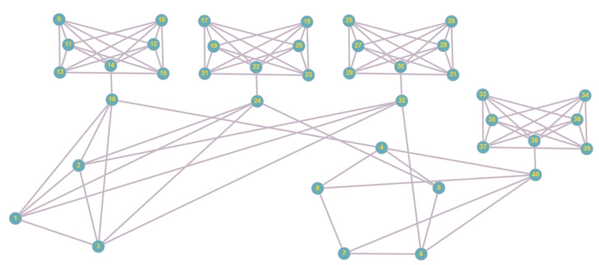

Рис. 4. Граф G_2

Далі додаємо одну копію P_2 і приєднаємо обидві його вершини до 4 вершин більшого циклу в X, таким чином, щоб всі вершини із набору X мали степінь 5 (рис. 5). Позначимо цей граф G_3.

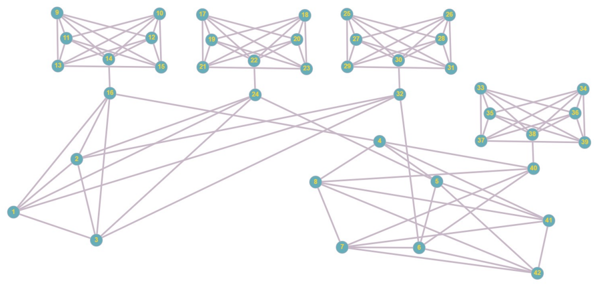

Рис. 5. Граф G_3

Отриманий граф є 5-регулярним і зв'язним, а X є набором перемикання Годзіла–Маккея. Такий граф не має досконалих парувань, адже до нього входять 4 копії графа $\tilde{H}_5$, і кожна з 4 відповідних вершин v має входити до парування. Тоді для того, щоб цей граф мав досконале парування, три вершини, що входять до меншого циклу, повинні мати досконале парування у межах циклу, адже суміжні з ними вершини v вже входять до парування. Очевидно, що трикутний цикл досконалого парування не має, а отже, і граф на рисунку 5 не має досконалого парування.

Крок 5. Виконаємо перемикання Годзіла-Маккея для отриманого графа. У набір Y входять вершини $\{16, 24, 32, 40, 41, 42\}$, які суміжні рівно із половиною вершин із набору X, тобто із чотирма. Видалимо ребра між цими вершинами із Y та X та з'єднаємо вершини $\{16, 24, 32, 40, 41, 42\}$ із іншою половиною вершин із X. Отримали граф, що на рис. 6. Позначимо цей граф G_4.

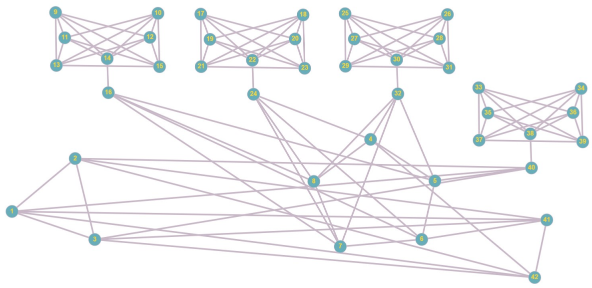

Рис. 6. Граф G_4

Після перемикання граф G_4 матиме декілька досконалих парувань. Наприклад, одне із них $M = \{(1, 42), (2, 3), (4, 5), (6, 41), (7, 8), (9, 12), (10, 11), (13, 15), (14, 16), (17, 20), (18, 19), (21, 23), (22, 24), (25, 28), (26, 27), (29, 31), (30, 32), (33, 36), (34, 35), (37, 39), (38, 40)\}$.

Тоді, за теоремою 1 маємо, що графи G_3 і G_4 коспектральні. У цьому також можна пересвідчитися, порівнявши їхні характеристичні поліноми. Для обчислення спектрів графів було використано алгоритм Фадєєва–Ле Вер'є, який запрограмований на сайті https://planetcalc.com/8267/.

Отримано, що спектри графів G_3 і G_4 збігаються і рівні $\sigma = \{-2.91645, -2.61776, -2.48344, -2.47449, -2.13741, -2.09165, (-2)^5, -1.72311, (-1)^7, -0.60907, -0.39471, 0^8, 0.0954, 0.43207, 0.6305, 0.65025, 1, 1.50185, 1.6419, 4.06681, 4.70625, 4.90255, 4.90281, 4.91771, 5\}$.

Висновки

Отриманий приклад наочно демонструє, що за спектром неможливо визначити існування досконалого парування у графах.

Список літератури

1. Cioaba S. M., Gregory D., Haemers W. H. Matching in regular graphs from eigenvalues. *Journal of Combinatorial Theory.* 2009. Vol. 99. Pp. 287–297.
2. van Dam E. R. , Haemers W. H. Which graphs are determined by their spectrum? *Linear Algebra and its Applications.* 2003. № 373. Pp. 241–272.
3. Blazsik Z. L., Cummings J., Haemers W. H. Cospectral regular graphs with and without a perfect matching. *Discrete Mathematics.* 2015. №338. Pp. 199–201.
4. Brouwer A. E., Haemers W. H. Spectra of Graphs New York. Springer, 2011. P. 250.

References

1. S. M. Cioaba, D. Gregory and W. H. Haemers, "Matching in regular graphs from eigenvalues Journal of Combinatorial Theory. **99**, 287–297 (2009).
2. E. R. van Dam and W. H. Haemers, "Which graphs are determined by their spectrum? Linear Algebra and its Applications. **373**, 241–272 (2003).
3. Z. L. Blazsik, J. Cummings and W. H. Haemers, "Cospectral regular graphs with and without a perfect matching Discrete Mathematics. **338**, 199–201 (2015).
4. A. E. Brouwer and W. H. Haemers, Spectra of Graphs (New York, Springer, 2011), p. 250.

V. Sobolev, V. Solomko

CONSTRUCTING THE MATE OF COSPECTRAL 5-REGULAR GRAPHS WITH AND WITHOUT A PERFECT MATCHING

The problem of finding a perfect matching in an arbitrary simple graph is well known and popular in graph theory. It is used in various fields, such as chemistry, combinatorics, game theory etc. The matching of M in a simple graph G is a set of pairwise nonadjacent edges, ie, those that do not have common vertices. Matching is called perfect if it covers all vertices of the graph, ie each of the vertices of the graph is incidental to exactly one of the edges. By Koenig's theorem, regular bipartite graphs of positive degree always have perfect matching. However, graphs that are not bipartite need further research.

Another interesting problem of graph theory is the search for pairwise nonisomorphic cospectral graphs. In addition, it is interesting to find cospectral graphs that have additional properties. For example, finding cospectral graphs with and without a perfect matching.

The fact that for each $k \geq 5$ there is a pair of cospectral connected k-regular graphs with and without a perfect matching had been investigated by Blazsik, Cummings and Haemers. The pair of cospectral connected 5-regular graphs with and without a perfect matching is constructed by using Godsil-McKay switching in the paper.

Keywords: cospectral graphs, regular graph, perfect matching, Godsil-McKay switching.

Матеріал надійшов 28.10.2021