УДК 519.837.3

Силенко І. В.

DOI: https://doi.org/10.18523/2617-70804202141-47

СТІЙКІСТЬ У СИМЕТРИЧНІЙ МОДЕЛІ ГРИ ВИДОБУТКУ РЕСУРСІВ ІЗ КОАЛІЦІЙНОЮ СТРУКТУРОЮ

Гра видобутку ресурсів / накопичення капіталу є стохастичною грою з ненульовою сумою і необмеженим горизонтом, що утворена розширенням економічної моделі оптимального росту (optimal growth) на m стратегічно конкуруючих між собою агентів, у спільному володінні яких опиняється відновлювальний ресурс. У науковій літературі з тематики велику увагу приділено існуванню рівноваги за Нешем в окремих моделях цієї гри, зокрема симетричних. У цій статті пропонується долучити до розгляду симетричної гри видобутку ресурсів коаліційну складову. А саме, досліджується стійкість відносно коаліційних відхилень у грі з фіксованою коаліційною структурою. Припускається, що на множині гравців задано розбиття на коаліції, що не перетинаються і залишаються сталими протягом усієї тривалості гри. При цьому, учасники однієї коаліції здатні узгоджувати дії, здійснюючи спільні кооперативні відхилення. Таким чином, впроваджується природний концепт наявності соціальних взаємозв'язків між агентами, що може відтворювати потенційний контекст у практичному застосуванні. Поняття стійкості в межах статті визначається як положення, від якого жодна зі встановлених коаліцій не здатна відхилитись, одночасно збільшивши сумарний виграш усіх її членів. Існування такої стійкості розглядається в рамках конкретної симетричної моделі гри видобутку ресурсів з необмеженими функціями корисності гравців. Ця модель раніше досліджувалася у роботах [12; 13], де було виведено існування Стаціонарної Марковської Ідеальної Рівноваги в рамках симетричної та несиметричної структури гри. Першою особливістю моделі є те, що функції корисності гравців покладено степеневими та строго опуклими вгору, тобто, згідно з економічною термінологією, ізоеластичними. По-друге, в якості закону переходу між станами взято геометричне випадкове блукання, параметром якого є спільні інвестиції гравців. Доводиться, що в описаній постановці задачі існує стійкість відносно коаліційних відхилень для будь-якого розбиття множини агентів на коаліції. Метод доведення цього факту одночасно окреслює алгоритм побудови відповідних стійкому положенню стаціонарних стратегій, що можна використовувати в практичних цілях. Наприкінці розглянуто два приклади з різною числовою постановкою, що ілюструють можливі варіанти залежності індивідуальних виграшів гравців від того, яку коаліційну структуру встановлено на початку гри.

Ключові слова: коаліції, стохастична гра, гра видобутку ресурсів, накопичення капіталу, ізоеластина корисність, геометричне випадкове блукання.

Вступ

Ігри видобутку ресурсів (інша назва — ігри накопичення капіталу) вивчають економічну взаємодію агентів у контексті спільного використання відновлюваного ресурсу. Вперше таку гру було сформульовано в детермінованій версії у роботі [1], а у [2] було встановлено існування рівноваги Неша для симетричної детермінованої гри з компактним простором станів. Особливо істотний науковий інтерес гра видобутку ресурсів становить як різновид стохастичної. Існування рівноваги Неша досліджувалось як у різних її симетричних моделях [3–7], так і в деяких несиметричних [8–11].

У роботі розглянуто симетричну модель стохастичної гри видобутку ресурсів, в якій учасники мають необмежені ізоеластичні функції корисності, представлені у степеневому вигляді. Водночас, правило переходу між станами задається на необмеженому інтервалі геометричним випадковим блуканням відносно спільних інвестицій всіх гравців. Існування рівноваги Неша в такій постановці задачі було доведено у статті [12]. Результат також було узагальнено на несиметричну гру у [13]. Метою цієї роботи є дослідити існування рівноваги між гравцями, що мають можливість узгоджувати дії в межах фіксованих соціальних структур. Такий підхід враховує наявність союзних зв'язків між учасниками, що цілком може відтворювати певний дійсний контекст. Рівновага між сталими коаліціями є проміжним концептом у вивченні стійкості серед традиційної рівноваги за Нешем та сильної рівноваги, яка в свою чергу трапляється лише у виняткових ситуаціях. Ідея переходу до фіксованої соціальної організації між гравцями не є новою в теорії ігор. У роботі [14] було введено поняття partition equilibrium, яке для заданого розбиття на коаліції являє собою стійкість відносно коаліційних відхилень, що покращують становище хоча б одного її члена і не погіршують становище інших. На противагу, поняття стійкості у цій статті розширюється і на *кооперативні* відхилення гравців однієї коаліції, тобто такі, що збільшують їхній сумарний виграш.

Основний результат роботи, а саме існування рівноваги відносно коаліційних відхилень у грі з будь-яким заданим коаліційним розбиттям, представлено Теоремою 1. Доведення проводиться через допоміжні Леми 2 і 3, а сам метод перегукується з підходом у статті [13]. Наприкінці роботи наведено два приклади, що покликані порівняти виграші гравців у міжкоаліційній рівновазі для тих чи інших коаліційних утворень, а також продемонструвати шляхи застосування теоретичних результатів на практиці.

Модель гри

Розглядається *симетрична* стохастична гра видобутку ресурсів, у якій:

(i) $P := \{1, 2, \ldots, m\}$ — множина гравців ($m \in \mathbb{N}, m \geq 2$);

(ii) $S := [0; +\infty)$ — простір можливих станів;

(iii) $A(s) := [0; s]$ — простір рішень для кожного гравця відповідно до поточного стану s;

(iv) $D(s) := \left\{(x_1, ..., x_m) \in A(s)^m : \sum_{i=1}^{m} x_i \leq s\right\}$ — простір прийнятних сукупних рішень відповідно до поточного стану s;

(v) $u : S \to [0; +\infty)$ — неперервна функція корисності кожного гравця;

(vi) $\beta \in (0; 1)$ — множник дисконтування.

Особливі припущення моделі:

A1 $u(x) = cx^{\alpha}$, де $c \in (0; +\infty)$, $\alpha \in (0; 1)$.

A2 Кожен наступний стан s_{t+1} ($t \in \mathbb{N}$) визначається за правилом

$$s_{t+1} = \left(s_t - \sum_{i=1}^{m} x_{ti}\right) \cdot \xi_t,$$

де $s_t \in S$ — попередній стан, $(x_{t1}, \ldots, x_{tm}) \in D(s_t)$ — рішення гравців у ньому, ξ_t — незалежна реалізація невід'ємної випадкової величини ξ, розподіл якої є відкритою інформацією.

A3 Величина $l := \beta \cdot \mathbb{E}\,(\xi^{\alpha}) \in (0; 1)$.

Інтерпретація гри: m агентів *спільно* володіють продуктивним ресурсом протягом необмеженого періоду. В кожен із дискретних моментів часу гравці спостерігають поточну кількість ресурсу (стан гри) й *одночасно* та *незалежно* один від одного приймають рішення про власний видобуток у дозволених межах (простір рішень). Якщо сукупне рішення є прийнятим, то кожен гравець залежно від свого рішення отримує миттєвий виграш (функція u), після чого гра переходить у наступний стан згідно з правилом **A2**. Зауважимо, що $s = 0$ — поглинаючий стан. Сумарним виграшем кожного учасника гри є нескінченна дисконтована сума всіх його миттєвих виграшів. У випадку, якщо на якомусь з етапів сукупне рішення гравців не виявилося прийнятим, будемо вимагати перегравання, допоки не буде визначено прийнятне сукупне рішення. Таким чином, досліджуватимуться лише ті профілі стратегій, що генерують прийнятні рішення.

Нехай F — множина всіх борелевих функцій $f : S \to S$, таких що $f(s) \in A(s)$ для $\forall s \in S$. *Марковською стратегією* називають послідовність $(f_1, f_2, \ldots)$, де $f_t \in F$ — функція вибору, якою послуговується гравець у момент часу $t \in \mathbb{N}$. Марковська стратегія, у якій всі f_t рівні між собою ($t \in \mathbb{N}$), є *стаціонарною*. Оскільки стаціонарна стратегія є сталою послідовністю, будемо ототожнювати її з певним відображенням $f \in F$.

Нехай Π — множина всіх можливих марковських стратегій окремого гравця; Φ — простір усіх профілів $(\pi_1, \ldots, \pi_m)$, таких, що $\forall i \in P$ $\pi_i = (f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots) \in \Pi$, причому $\forall t \in \mathbb{N}$, $\forall s \in S$ $\sum_{i=1}^{m} f_t^{(i)}(s) \leq s$.

Для кожного початкового стану $s_1 = s \in S$ і профілю стратегій $\pi \in \Phi$ можемо визначити ймовірнісну міру P_s^{π} і стохастичний процес $\{S_t, X_t\}$ в канонічний спосіб (див. Розділ 7 у [15]), де випадкові величини S_t і X_t відповідають стану і вектору виборів гравців у момент часу $t \in \mathbb{N}$. Тоді, *очікуваний дисконтований* виграш гравця $i \in P$, залежний від початкового стану $s \in S$ та профілю стратегій $\pi \in \Phi$, дорівнює

$$\gamma_i(\pi)(s) = \mathbb{E}_s^{\pi} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\, u(X_{ti})\right),$$

де X_{ti} — це i-та координата вектора X_t, а $\mathbb{E}_s^{\pi}$ — математичне сподівання відносно міри P_s^{π}.

Коаліційна складова

Позначення: Сукупність стратегій множини гравців $K \subseteq P$ (тобто *коаліції*) у профілі $\pi \in \Phi$

позначимо π_K. Записом (κ, π_{-K}) будемо виражати профіль $\pi \in \Phi$, у якому стратегії коаліції $K \subseteq P$ замінені на $\kappa \in \Pi^{|K|}$.

Означення 1. Профіль стратегій $\pi \in \Phi$ називають *стійким* відносно *кооперативного* відхилення коаліції $K \subseteq P$, якщо $\forall s \in S$, $\forall (\kappa, \pi_{-K}) \in \in \Phi$

$$\sum_{i \in K} \gamma_i(\pi)(s) \geq \sum_{i \in K} \gamma_i(\kappa, \pi_{-K})(s).$$

Надалі вважатимемо, що на множині гравців задано фіксовану коаліційну структуру у вигляді розбиття $C = (C_1, C_2, \ldots, C_N) \quad (2 \leq N \leq m)$, де $\bigcup_{i \in [N]} C_i = P$, причому $C_i \cap C_j = \emptyset$ для різних i, j з множини $[N] = \{1, \ldots, N\}$.

Означення 2. Профіль (стаціонарних) стратегій, що є стійким відносно кооперативного відхилення будь-якої коаліції $C_i \in C$, називають (стаціонарною) *C-стійкою рівновагою.*

Теорема 1. *У грі видобутку ресурсів із властивостями* (i)–(vi), **A1**–**A3** *та довільним коаліційним розбиттям C існує стаціонарна C-стійка рівновага.*

Доведення

Зафіксуємо розбиття C і визначимо числа $m_i := |C_i|$, де $C_i \in C$.

Очікуваним сумарним виграшем коаліції $C_i \in C$, що відповідає профілю стратегій $\pi \in \Phi$ та початковому стану $s \in S$, є

$$\sum_{j \in C_i} \gamma_j(\pi)(s) = \sum_{j \in C_i} \mathbb{E}_s^\pi \left(\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \, u(X_{tj}) \right) = \\ = \mathbb{E}_s^\pi \left(\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \sum_{j \in C_i} u(X_{ti}) \right).$$

Тоді функціональне рівняння Белмана для виграшу коаліції $C_i \in C$ є таким:

$$V_i(s) = \sup_{(x_1, \ldots, x_{m_i}) \in D_i\left(s, y_i(s)\right)} \left\{ \sum_{j=1}^{m_i} u(x_j) + \right. \\ \left. + \beta \, \mathbb{E} \, V_i \left(\left(s - y_i(s) - \sum_{j=1}^{m_i} x_j \right) \xi \right) \right\},$$

де $y_i(s) \in A(s)$ — *сума* реалізацій стаціонарних стратегій усіх гравців $k \in P \backslash C_i$ у положенні s, і

$$D_i(s, y) := \left\{ (x_1, \ldots, x_{m_i}) \in A(s)^{m_i} : \right. \\ \left. \sum_{j=1}^{m_i} x_j \leq s - y \right\}.$$

Сформулюємо проміжні результати для доведення Теореми 1.

Лема 2. *Для будь-якого $s \in S$ та $(b_1, \ldots, b_N) \in \in (0; +\infty)^N$ існує єдиний розв'язок системи*

$$i = \overline{1, N}: \quad \left(a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(m_i)}\right) = \\ = \operatorname*{arg\,max}_{(x_1, \ldots, x_{m_i}) \in D_i(s, A_i)} \left\{ \sum_{j=1}^{m_i} u(x_j) + \right. \\ \left. + b_i \left(s - A_i - \sum_{j=1}^{m_i} x_j \right)^\alpha \right\}, \qquad (1)$$

$$\text{де} \quad A_i := \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \sum_{j=1}^{m_k} a_k^{(j)}.$$

Доведення. З опуклості вгору функції u та нерівності Єнсена випливає, що для будь-яких $n \in \in \mathbb{N}$, $(x_1, \ldots, x_n) \in [0; +\infty)^n$,

$$\sum_{j=1}^{n} u(x_j) \leq n \, u \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \right).$$

Тому, шукаючи аргумент максимізації кожного рівняння системи (1), достатньо зосередитися на таких $(x_1, \ldots, x_{m_i}) \in D_i(s, A_i)$, що $x_1 = \cdots = x_{m_i}$.

Для кожного i знайдемо значення a_i, яке максимізує функцію

$$w_i(x) := m_i u(x) + b_i (s - A_i - m_i x)^\alpha$$

на області $[0; (s - A_i)/m_i]$. Припускається, що $A_i \in [0; s]$.

Дослідимо нетривіальний випадок $A_i \neq s$. Необхідна умова першого порядку екстремуму функції $w_i(x)$ є такою:

$$c x^{\alpha - 1} = b_i (s - A_i - m_i x)^{\alpha - 1}; \\ x = \frac{s - A_i}{m_i + (b_i / c)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \in \big(0; (s - A_i)/m_i\big).$$

При цьому, для всіх $x \in \big(0; (s - A_i)/m_i\big)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_i(x) = m_i c \alpha (\alpha - 1) x^{\alpha - 2} + \\ + b_i \alpha (\alpha - 1) m_i^2 (s - A_i - m_i x)^{\alpha - 2} < 0.$$

Отже, $a_i = (s - A_i) \big(m_i + (b_i/c)^{\frac{1}{1-\alpha}} \big)^{-1}$. Зауважимо, що цей вираз залишається коректним і в тривіальному випадку $A_i = s$.

Система (1) переписується в таку:

$$\begin{cases} i = \overline{1, N}: & \left(m_i + (b_i/c)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) a_i = \\ & = \left(s - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} m_j a_j \right), \\ \sum_{j=1}^{N} m_j a_j \leq s. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'язуючи перші N рівнянь системи (2), отримуємо, що

$$(b_1/c)^{\frac{1}{1-\alpha}}\, a_1 = \cdots = (b_N/c)^{\frac{1}{1-\alpha}}\, a_N = \\ = \Big(s - \sum_{j=1}^{N} m_j a_j\Big),$$

звідки $\forall i \in [N]$

$$a_i = s\bigg(b_i^{\frac{1}{1-\alpha}}\Big(c^{\frac{-1}{1-\alpha}} + \sum_{j=1}^{N} m_j b_j^{\frac{-1}{1-\alpha}}\Big)\bigg)^{-1}.$$

Легко пересвідчитись, що ці значення задовольняють систему (2) повністю. Таким чином, знайдено єдиний роз'язок системи (2), звідки отримуємо, що єдиним розв'язком системи (1) є вектори $\big(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(m_i)}\big) = (a_i, \dots, a_i)$, де $i = \overline{1, N}$. □

Нехай $U := \{v : S \to [0; +\infty) \mid v(s) = K \cdot s^\alpha,\ K \in (0; +\infty)\}$.

Лема 3. *Існує набір функцій $(V_1, \dots, V_N) \in U^N$, що одночасно задовольняють N рівностей для кожного $i \in [N]$:*

$$\begin{aligned} &V_i(s) = \\ &= \sum_{j=1}^{m_i} u\big(a_i^{(j)}\big) + \beta\, \mathbb{E}\, V_i\bigg(\Big(s - \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_k} a_k^{(j)}\Big)\xi\bigg) = \\ &= \max_{(x_1,\dots,x_{m_i}) \in D_i(s, A_i)} \bigg\{ \sum_{j=1}^{m_i} u(x_j) + \\ &+ \beta\, \mathbb{E}\, V_i\bigg(\Big(s - A_i - \sum_{j=1}^{m_i} x_j\Big)\xi\bigg)\bigg\}, \end{aligned} \tag{3}$$

де $\displaystyle A_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \sum_{j=1}^{m_k} a_k^{(j)}$.

Доведення. Нехай $V_i(s) = K_i s^\alpha$, де $K_i \in (0; +\infty)$ $\forall i \in [N]$. Тоді праві частини рівностей (3) запишуться таким чином:

$$\sum_{j=1}^{m_i} u\big(a_i^{(j)}\big) + K_i l\Big(s - A_i - \sum_{j=1}^{m_i} a_i^{(j)}\Big)^\alpha = \\ = \max_{(x_1,\dots,x_{m_i}) \in D_i(s, A_i)} \bigg\{ \sum_{j=1}^{m_i} u(x_j) + \\ + K_i l\Big(s - A_i - \sum_{j=1}^{m_i} x_j\Big)^\alpha \bigg\}.$$

Утворивши систему по всім $i \in [N]$, згідно з Лемою 2 отримуємо, що $\forall i \in [N]$ $\big(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(m_i)}\big) = (q_i Q s, \dots, q_i Q s)$, де $q_i = (c/K_i l)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $Q = \Big(1 + \sum_{j=1}^{N} m_j q_j\Big)^{-1}$.

Тепер перетворимо ліві частини рівностей (3):

$$K_i s^\alpha = m_i c (q_i Q s)^\alpha + K_i l\Big(s - Qs\sum_{k=1}^{N} m_k q_k\Big)^\alpha = \\ = (Qs)^\alpha\big(m_i c q_i^\alpha + K_i l\big) = (Qs)^\alpha K_i l\big(m_i q_i + 1\big).$$

Маємо систему

$$i = \overline{1, N}: \quad 1 = Q^\alpha l\big(m_i q_i + 1\big) \tag{4}$$

Для доведення того, що система (4) розв'язна, розглянемо допоміжну функцію $g : [1; +\infty) \to \mathbb{R}$:

$$g(z) = \frac{1}{z}\Big(N\frac{z^\alpha}{l} - N + 1\Big),$$

для якої справедливо:

(а). $g(z)$ неперервна на $[1; +\infty)$;
(б). $g(1) > 1$ (внаслідок **А3**);
(в). $\lim_{z \to +\infty} g(z) = 0$.

З властивостей (а)–(в) випливає, що існує точка $z^* \in (1; +\infty)$, така що $g(z^*) = 1$.

Покладемо для кожного $i \in [N]$

$$q_i = \frac{\big(z^*\big)^\alpha - l}{m_i l} \in (0; +\infty),$$

і помітимо, що виконується відношення

$$z^* = N\frac{\big(z^*\big)^\alpha}{l} - N + 1 = \sum_{j=1}^{N}\bigg(\frac{\big(z^*\big)^\alpha}{l} - 1\bigg) + 1 = \\ = \sum_{j=1}^{N} m_j q_j + 1.$$

Тоді $\forall i \in [N]$

$$q_i = \frac{\Big(\sum_{j=1}^{N} m_j q_j + 1\Big)^\alpha - l}{m_i l},$$

що еквівалентно рівнянням системи (4). □

Доведення Теореми 1. Нехай функції $V_i = K_i^* s^\alpha$ одночасно задовольняють рівності (3) для кожного $i \in [N]$.

Визначимо стаціонарні стратегії $f_i(s) := (c/K_i^* l)^{\frac{1}{1-\alpha}}\Big(1 + \sum_{j=1}^{N} m_j (c/K_j^* l)^{\frac{1}{1-\alpha}}\Big)^{-1} s$ для всіх $i \in [N]$. З вибору стратегій f_i слідує, що

$$\begin{aligned} &V_i(s) = \\ &= \sum_{j=1}^{m_i} u\big(f_i(s)\big) + \beta\, \mathbb{E}\, V_i\bigg(\Big(s - \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{m_k} f_k(s)\Big)\xi\bigg) = \\ &= \max_{(x_1,\dots,x_{m_i}) \in A(s)^{m_i}} \bigg\{ \sum_{j=1}^{m_i} u(x_j) + \\ &+ \beta\, \mathbb{E}\, V_i\bigg(\Big(s - \sum_{j=1}^{m_i} x_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N}\sum_{j=1}^{m_k} f_k(s)\Big)\xi\bigg)\bigg\} \end{aligned} \tag{5}$$

для всіх $s \in S$ та $i \in [N]$.

Визначимо стаціонарний профіль стратегій $\pi^* \in \Phi$ таким чином, що $\pi^*_{C_i} = (f_i, \dots, f_i)$, тобто f_i — стаціонарна стратегія кожного гравця коаліції C_i.

Легко пересвідчитись, що для $\forall i \in [N]$, $\forall S_1 = s \in S$ та $\forall \kappa \in \Pi^{m_i}$, такого що $\pi = (\kappa, \pi^*_{-C_i}) \in \Phi$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}^\pi_s \left[\beta^{t-1} V_i(S_t)\right] = \lim_{t\to\infty} \beta^{t-1} K^*_i \, \mathbb{E}^\pi_s \left[(S_t)^\alpha\right] = \\
&= \lim_{t\to\infty} \beta^{t-1} K^*_i \, \mathbb{E}^\pi_s \left[\big(S_{t-1} - \sum_{i=1}^{m} X_{ti}\big)^\alpha \xi^\alpha_{t-1}\right] \le \\
&\le \lim_{t\to\infty} \beta^{t-1} K^*_i \, \mathbb{E}^\pi_s \left[\big(S_{t-1}\big)^\alpha \xi^\alpha_{t-1}\right] \le \dots \le \\
&\le \lim_{t\to\infty} \beta^{t-1} K^*_i \, \mathbb{E}^\pi_s \left[\big(S_1\big)^\alpha \xi^\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \xi^\alpha_{t-1}\right] = \\
&= K^*_i s^\alpha \lim_{t\to\infty} \beta^{t-1} \, \mathbb{E} \left[\xi^\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \xi^\alpha_{t-1}\right] = \\
&= K^*_i s^\alpha \lim_{t\to\infty} \big(\beta \, \mathbb{E}\left[\xi^\alpha\right]\big)^{t-1} = 0. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Властивості (5), (6) та принцип оптимальності динамічного програмування за умов невизначеності дозволяють стверджувати, що для $\forall i \in [N]$, $\forall s \in S$ і $\forall \kappa \in \Pi^{m_i}$, такого що $(\kappa, \pi^*_{-C_i}) \in \Phi$,

$$V_i(s) = \sum_{j \in C_i} \gamma_j(\pi^*)(s) \ge \sum_{j \in C_i} \gamma_j(\kappa, \pi^*_{-C_i})(s),$$

тобто π^* є C-стійкою рівновагою. □

Перехід до індивідуальних виграшів гравців

Метою цього розділу є оцінити, яким чином змінюються індивідуальні виграші гравців у C-стійкій рівновазі залежно від розбиття C.

Завдяки тому, що оптимальні виграші всіх коаліцій, які перебувають у C-стійкій рівновазі, досягаються застосуванням ідентичних стратегій гравцями всередині кожної з них, то природно припускати, що подальшого перерозподілу сукупного виграшу в коаліціях не відбувається. Дійсно, якщо кожен гравець $j \in C_i$ отримує виграш $\gamma_j(\pi^*)(s)$, де $s \in S$ — початковий стан, то це відповідає як поділу прибутку порівну, так і поділу згідно з внесками.

Приклад 1. Нехай гра видобутку ресурсів відбувається між 4 учасниками з параметрами $u(x) = 2\,x^{0.45}$, $\beta = 0.9$. Рівнянням стану $\forall t \in \mathbb{N}$ є

$$s_{t+1} = \left(s_t - \sum_{i=1}^{4} x_{ti}\right) \cdot e^\eta,$$

де $(x_{t1}, \dots, x_{t4}) \in D(s_t)$ — вибори гравців у стані s_t, а η — випадкова величина зі стандартним нормальним розподілом $N(0,1)$.

Тоді

$$l = \beta\, e^{\alpha^2/2} = 0.9958979\dots$$

Для кожного окремого розбиття C, індивідуальні виграші гравців у C-стійкій рівновазі можна обчислити, використовуючи значення z^* з доведення Леми 3. За допомогою стандартних чисельних методів знайдемо точку z^* перетину функції $g(z)$ з тотожною одиницею на області $(1; +\infty)$. Тоді виграш кожного гравця коаліції C_i дорівнює

$$\frac{K^*_i s^\alpha_1}{m_i} = \frac{c\, s^\alpha_1}{m_i\, l\, q_i^{1-\alpha}} = \frac{c\, s^\alpha_1}{m^\alpha_i\, l^\alpha \big((z^*)^\alpha - l\big)^{1-\alpha}}, \quad (7)$$

де $s_1 \in S$ — початковий стан гри.

Для порівняння включимо також ситуацію, у якій всі гравці кооперуються, тобто є частиною однієї коаліції. Поклавши $N = 1$, з формул, виведених у доведенні Лем 2 і 3, можна легко отримати, що оптимальним вибором кожного гравця у кооперації є $a = \big(1 - l^{\frac{1}{1-\alpha}}\big)\, s/m$, а відповідні виграші дорівнюють $c\,\big(1 - l^{\frac{1}{1-\alpha}}\big)^{\alpha-1} \big(s/m\big)^\alpha$.

Запишемо таблицею обчислені значення індивідуальних виграшів гравців у C-стійкій рівновазі для різних розбиттів C, а також оптимальні виграші у випадку, коли всі гравці кооперуються:

Коаліційне розбиття на множині гравців	Вектор виграшів із точністю до $s^\alpha_1 \cdot 10^{-2}$
$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$	$(1.77, 1.77, 1.77, 1.77) \cdot s^\alpha_1$
$\{1,2\},\{3\},\{4\}$	$(1.98, 1.98, 2.70, 2.70) \cdot s^\alpha_1$
$\{1,2\},\{3,4\}$	$(9.11, 9.11, 9.11, 9.11) \cdot s^\alpha_1$
$\{1,2,3\},\{4\}$	$(7.59, 7.59, 7.59, 12.45) \cdot s^\alpha_1$
$\{1,2,3,4\}$	$(15.86, 15.86, 15.86, 15.86) \cdot s^\alpha_1$

Цікавим наслідком формули (7) є те, що для кожної C-стійкої рівноваги гравці кількісно менших коаліцій отримують більші прибутки. Помітимо також, що в цьому прикладі будь-які злиття коаліцій приносять вигоду учасникам. Проте у загальній постановці задачі це не завжди так, що ілюструє такий приклад.

Приклад 2. Відкоригуємо умову Прикладу 1, поклавши $\alpha = 0.5$ і $\beta = 0.7$. Тоді $l = 0.7932039\dots$, і відповідна таблиця перетвориться на таку:

Коаліційне розбиття на множині гравців	Вектор виграшів із точністю до $s_1^\alpha \cdot 10^{-2}$
$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$	$(1.19, 1.19, 1.19, 1.19) \cdot s_1^\alpha$
$\{1,2\},\{3\},\{4\}$	$(1.03, 1.03, 1.46, 1.46) \cdot s_1^\alpha$
$\{1,2\},\{3,4\}$	$(1.42, 1.42, 1.42, 1.42) \cdot s_1^\alpha$
$\{1,2,3\},\{4\}$	$(1.16, 1.16, 1.16, 2.02) \cdot s_1^\alpha$
$\{1,2,3,4\}$	$(1.64, 1.64, 1.64, 1.64) \cdot s_1^\alpha$

Тепер можна спостерігати, що в більшості випадків об'єднання коаліцій не вигідне хоча б для однієї зі сторін.

Додаткову увагу звернімо на перший і останній рядки таблиць. У першому рядку записані виграші гравців, що перебувають у рівновазі Неша, причому симетричній, а в останньому наведено оптимальні виграші за умови кооперації. Прибутки в кооперації є очікувано більш вигідними для кожного гравця, оскільки вони отримані як максимальні на множині всіх симетричних стратегій, яка включає також і симетричну рівновагу Неша.

Кінцевою метою утворення коаліцій є зиск гравців від спільних дій в умовах середовища зі взаємною довірою. Показовий момент ситуації Прикладу 2 полягає в тому, що ця мета досяжна лише за умови узгоджених дій *всіх* гравців. Якщо хоча б один учасник відмовляється вступати в коаліцію, то жодні групові об'єднання не є доречними. В такому випадку кожному гравцеві залишається діяти самостійно, а саме — обирати стратегію, що продукує рівновагу Неша.

Наведені приклади демонструють не тільки алгоритмічний спосіб знаходження виграшів для рівноваги між сталими коаліціями, а й те, наскільки суттєво параметри гри впливають на мотивацію гравців встановлювати ті чи інші соціальні зв'язки.

Список літератури

1. Levhari D., Mirman L. J. The Great Fish War: An Example Using a Dynamic Cournot-Nash Solution. *The Bell Journal of Economics*.1980. Vol. 11, no. 1. Pp. 322–334.
2. Sundaram R. K. Perfect equilibrium in non-randomized strategies in a class of symmetric dynamic games. *Journal of Economic Theory*. 1989. Vol. 47, no. 1. Pp. 153–177.
3. Majumdar M., Sundaram R. K. Symmetric stochastic games of resource extraction: The existence of non-randomized stationary equilibrium. *Theory and Decision Library*. Netherlands: Springer, 1991. Pp. 175–190.
4. Dutta P. K., Sundaram R. K. Markovian equilibrium in a class of stochastic games: existence theorems for discounted and undiscounted models. *Economic Theory*. 1992. Vol. 2, no. 2. Pp. 197–214.
5. Balbus L., Nowak A. S. Construction of Nash equilibria in symmetric stochastic games of capital accumulation. *Mathematical Methods of Operational Research*. 2004. Vol. 60, no. 2. Pp. 267–277.
6. Jaśkiewicz A., Nowak A. S. On symmetric stochastic games of resource extraction with weakly continuous transitions. *TOP*. 2018. Vol. 26, no. 2. Pp. 239–256.
7. Asienkiewicz H., Balbus L. Existence of Nash equilibria in stochastic games of resource extraction with risk-sensitive players. *TOP*. 2019. Vol. 27, no. 3. Pp. 502–518.
8. Amir R. Continuous stochastic games of capital accumulation with convex transitions. *Games and Economic Behavior*. 1996. Vol. 15, no. 2. Pp. 111–131.
9. Szajowski P. Constructions of Nash equilibria in stochastic games of resource extraction with additive transition structure. *Mathematical Methods of Operations Research*. 2006. Vol. 63, no. 2. Pp. 239–260.
10. Balbus L., Nowak A. S. Existence of perfect equilibria in a class of multigenerational stochastic games of capital accumulation. *Automatica*. 2008. Vol. 44, no. 6. Pp. 1471–1479.
11. Jaśkiewicz A., Nowak A. S. Stochastic games of resource extraction. *Automatica*. 2015. Vol. 54. Pp. 310–316.
12. Силенко І. В. Рівновага Неша в особливому випадку симетричних ігор видобутку ресурсів. *Кібернетика та системний аналіз*. 2021. Т. 57, № 5. С. 156–167.
13. Sylenko I. On a special case of non-symmetric resource extraction games with unbounded payoffs. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*. 2021. Vol. 12, no. 1. Pp. 1–7.
14. Feldman M., Tennenholtz M. Structured coalitions in resource selection games. *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*. 2010. Vol. 1, no. 1. Pp. 1–21.
15. Bertsekas D. P., Shreve, S. E. Stochastic optimal control : the discrete time case. New York: Academic Press, 1978.

References

1. D. Levhari and L. J. Mirman, "The Great Fish War: An Example Using a Dynamic Cournot-Nash Solution", The Bell Journal of Economics. **11** (1), 322–334 (1980).
2. R. K. Sundaram, "Perfect equilibrium in non-randomized strategies in a class of symmetric dynamic games", Journal of Economic Theory. **47** (1), 153–177 (1989).
3. M. Majumdar and R. K. Sundaram, Symmetric stochastic games of resource extraction: The existence of non-randomized stationary equilibrium, in: *Theory and Decision Library* (Netherlands: Springer, 1991), pp. 175–190.
4. P. K. Dutta and R. K. Sundaram, "Markovian equilibrium in a class of stochastic games: existence theorems for discounted and undiscounted models", Economic Theory. **2** (2), 197–214 (1992).
5. L. Balbus and A. S. Nowak, "Construction of Nash equilibria in symmetric stochastic games of capital accumulation", Mathematical Methods of Operational Research. **60** (2), 267–277 (2004).
6. A. Jaśkiewicz and A. S. Nowak, "On symmetric

stochastic games of resource extraction with weakly continuous transitions", TOP. **26** (2), 239–256 (2018).

7. H. Asienkiewicz and L. Balbus, "Existence of Nash equilibria in stochastic games of resource extraction with risk-sensitive players", TOP. **27** (3), 502–518 (2019).
8. R. Amir, "Continuous stochastic games of capital accumulation with convex transitions", Games and Economic Behavior. **15** (2), 111–131 (1996).
9. P. Szajowski, "Constructions of Nash equilibria in stochastic games of resource extraction with additive transition structure", Mathematical Methods of Operations Research. **63** (2), 239–260 (2006).
10. L. Balbus and A. S. Nowak, "Existence of perfect equilibria in a class of multigenerational stochastic games of capital accumulation", Automatica. **44** (6), 1471–1479 (2008).
11. A. Jaśkiewicz and A. S. Nowak, "Stochastic games of resource extraction", Automatica. **54**, 310–316 (2015).
12. І. В. Силенко, «Рівновага Неша в особливому випадку симетричних ігор видобутку ресурсів», Кібернетика та системний аналіз. **57** (5), 156–167 (2021).
13. I. Sylenko, "On a special case of non-symmetric resource extraction games with unbounded payoffs", An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA). **12** (1), 1–7 (2021).
14. M. Feldman and M. Tennenholtz, "Structured coalitions in resource selection games", ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology. **1** (1), 1–21 (2010).
15. D. P. Bertsekas and S. E. Shreve, *Stochastic optimal control : the discrete time case* (Academic Press, New York, 1978).

I. Sylenko

EQUILIBRIUM IN A SYMMETRIC GAME OF RESOURCE EXTRACTION WITH COALITIONAL STRUCTURE

The game of resource extraction / capital accumulation is a stochastic nonzero-sum infinite horizon game, obtained as an extension of the well-known optimal growth model to m strategically competing players, who jointly posses a renewable resource. The existence of a Nash equilibrium in different, often symmetric, frameworks of the game received a significant attention in the scientific literature on the topic. The focus of this paper is to introduce the coalitional component to the symmetric problem. Specifically, we examine whether the game with a fixed coalitional structure admits stability against profitable coalitional deviations. It is assumed that the set of all players is partitioned into coalitions which do not intersect and remain consistent throughout the game. The members of each coalition are able to coordinate their actions and perform joint deviations in a cooperative manner. Such setting incorporates a natural concept of established social ties, which may reflect a potential context appearing in practical applications. The corresponding notion of equilibrium in the paper is expressed as a position, from which none of the set coalitions can deviate in a manner to increase a total reward of its members. Its existence is studied in the context of a certain symmetric resource extraction game model with unbounded utilities of the players. This model was studied in [12; 13], concluding a Stationary Markov Perfect Equilibrium existence in both symmetric and non-symmetric game structure. The first feature of the model is that the preferences of the players are considered to be isoelastic in the form of strictly concave power functions. Furthermore, the law of motion between states is set to follow a geometric random walk in relation to players' joint investments. We prove that the game within the formulated settings admits stability against profitable coalitional deviations for any partition on the set of agents. The method provides an algorithm for building the corresponding stationary strategies, which can be useful for practical purposes. Finally, we use two examples with different numerical configurations to illustrate possible patterns of how the individual rewards of the players vary depending on a coalitional structure, which is set at the beginning of the game.

Keywords: coalitions, stochastic game, resource extraction game, capital accumulation, isoelastic utility, geometric random walk.

Матеріал надійшов 13.09.2021