УДК 511.7+517.5

Працьовитий М. В., Бондаренко О. І., Ратушняк С. П., Франчук К. В.

DOI: 10.18523/2617-7080520229-18

$\tilde{Q}$-ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ЯК УЗАГАЛЬНЕННЯ КАНТОРІВСЬКИХ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ

Роботу присвячено узагальненню канторівської системи числення, яка визначається послідовністю основ (s_n), $1 < s_n \in N$ і послідовністю алфавітів $A_n = \{0, 1, ..., s_n - 1\}$:

$$[0;1] \ni x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \ldots s_n},\ \alpha_n \in A_n,$$

яке назване $\widetilde{Q}$-зображенням. Воно визначається нескінченною «матрицею» $||q_{ik}||$, де $i \in A_i$, $k \in \in N$, що має властивості

$$0 < q_{ik} < 1,\ \sum_{i=0}^{m_k} q_{ik} = 1,\ k \in N,\ \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{q_{ik}\} = 0,$$

а саме

$$[0;1] \ni x = a_{i_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} [a_{i_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{i_j(x)j}] \equiv \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots},\ \text{де}\ a_{i_n n} = \sum_{j=0}^{i_n - 1} q_{jn},\ i_n \in A_n,\ n \in N.$$

У роботі розглянуто застосування вказаного зображення чисел у метричній теорії чисел, теорії розподілів випадкових величин, теорії локально складних функцій та фрактальному аналізі.

Вивчено тополого-метричну структуру множини $C[\widetilde{Q}; V_n] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}, \alpha_n \in V_n \subset A_n\}$. Виведено формулу для обчислення її міри Лебега:

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{\lambda(\overline{F}_n)}{\lambda(F_{n-1})}),$$

де $F_0 = [0;1]$, F_n — об'єднання $\widetilde{Q}$-циліндрів рангу n, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, $\overline{F}_n \equiv F_{n-1} \setminus F_n$.

Знайдено критерій і деякі достатні умови нуль-мірності цієї множини. За додаткових умов на «матрицю» $||q_{ik}||$ знайдено нормальну властивість $\widetilde{Q}$-зображення чисел (властивість, яку мають майже всі у розумінні міри Лебега числа). Отримані результати використано для встановлення лебегівської структури і типу розподілу випадкової величини, цифри $\widetilde{Q}$-зображення якої є незалежними випадковими величинами. Доведено, що цифри $\widetilde{Q}$-зображення рівномірно розподіленої на $[0;1]$ випадкової величини є незалежними, і вказано їх розподіл.

Доведено, що при обчисленні фрактальної розмірності Гаусдорфа–Безиковича підмножин відрізка $[0;1]$ можна обмежитись покриттями $\widetilde{Q}$-циліндрами: $\Delta_{c_1 \ldots c_m} = \{x : x = \Delta_{c_1 \ldots c_k i_1 \ldots i_n \ldots}, i_n \in \in A_{k+n}\}$, якщо потужності алфавітів обмежені, а елементи «матриці» $||q_{ik}||$ відокремлені від нуля.

Для інверсора цифр $\widetilde{Q}$-зображення чисел, тобто функції, означеної рівністю $I(x = \Delta_{i_1 \ldots i_n \ldots}) = = \Delta_{[m_1 - i_1] \ldots [m_n - i_n] \ldots}$, $m_n \equiv s_n - 1$ доведено неперервність, строгу монотонність, а для окремих випадків її сингулярність (рівність похідної нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).

Ключові слова: $\widetilde{Q}$-зображення чисел, $\widetilde{Q}$-бінарні числа, $\widetilde{Q}$-унарні числа, канторівська система числення, циліндр, розмірність Гаусдорфа–Безиковича, нормальна властивість числа, циліндрична похідна, сингулярна функція.

Вступ

У теорії неперервних локально складних функцій із фрактальними властивостями [10], зокрема сингулярних, неперервних ніде не монотонних, включаючи недиференційовні, функцій обмеженої та необмеженої варіації, існують методологічні труднощі у їх ефективному заданні та дослідженні. Найбільш дієвим, на наш погляд, є використання різних систем кодування чисел і автоматів перетворення цифр зображення аргумента в цифри значення функції [3; 4; 7; 11]. При цьому одним із простих способів означення функції є прийом інверсування цифр зображення аргумента [1; 9]. На цьому шляху було описано кілька класів функцій і вивчено їх структурні, диференціальні, варіаційні та фрактальні властивості. Серед них функції, визначені у термінах різних узагальнень та аналогів класичного двійкового зображення, а також у термінах ланцюгових дробів (елементарних, A_2-дробів та дробів Данжуа) [2; 8]. У цій роботі ми продовжуємо дослідження, розширюючи класи розглянутих функцій.

$\widetilde{Q}$-зображення чисел відрізка $[0;1]$

Нехай (m_k) — фіксована послідовність натуральних чисел, $A_k \equiv \{0,1,2,...,m_k\}$ — послідовність алфавітів, $L \equiv A_1 \times A_2 \times ...$ — простір (множина) послідовностей елементів алфавітів; $(q_{0k},...,q_{m_k k})$ — послідовність додатних стохастичних векторів-стовпців $(k = 1,2,...)$ таких, що:

1) $0 < q_{ik} < 1$;
2) $\sum\limits_{i=0}^{m_k} q_{ik} = 1$, $k \in N$;
3) для будь-якої $(i_n) \in L$ має місце $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_{i_n n} = 0 \Leftrightarrow \prod\limits_{n=1}^{\infty} \max\limits_i\{q_{in}\} = 0.$

Відомо [7], що для довільного числа $x_0 \in [0;1]$ існує послідовність $(i_k) \in L$ така, що

$$x_0 = a_{i_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty}[a_{i_k k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{i_j(x_0)j}] \equiv \Delta_{i_1 i_2 ... i_k ...}, \quad (1)$$

де $a_{i_k k} = \sum\limits_{s=0}^{i_k - 1} q_{sk}$.

Подання числа x_0 у вигляді ряду (1) називають його $\tilde{Q}$-*представленням*, скорочений запис $\Delta_{i_1 i_2 ... i_k ...}$ — його $\tilde{Q}$-*зображенням*, i_k — *k-ю цифрою* цього зображення.

Розклад числа x в ряд (1) і обчислення цифр $\widetilde{Q}$-зображення числа здійснюють за таким алгоритмом:

$x_0 = a_{i_1 1} + x_1$, де $0 \le x_1 \equiv x_0 - a_{i_1 1} \le q_{i_1 1}$,

$x_{n-1} = a_{i_n n}\prod\limits_{j=1}^{n-1} q_{i_j j} + x_n$,

де $0 \le x_n \equiv x_{n-1} - a_{i_n n}\prod\limits_{j=1}^{n-1} q_{i_j j} \le \prod\limits_{j=1}^{n} q_{i_j j}$;

$i_1 = \{j : a_{i_1 1} \le x_0 < a_{i_1+1,1},\}$

$i_n = \{j : a_{i_n n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} q_{i_k k} \le x_{n-1} \le a_{n+1,n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} q_{i_k k}.\}$

Існують числа, що мають два $\tilde{Q}$-зображення, оскільки

$$\Delta_{i_1 ... i_{n-1} i_n (0)} = \Delta_{i_1 ... i_{n-1}[i_n - 1] m_{n+1} m_{n+2} m_{n+3} ...}.$$

Їх називають $\tilde{Q}$-*бінарними*. Решта чисел мають єдине $\tilde{Q}$-зображення. Їх називають $\tilde{Q}$-*унарними*.

Якщо $m_k + 1 = s$ для будь-якого $k \in N$, то $\widetilde{Q}$-зображення є Q_s^*-зображення чисел; якщо ж при цьому $q_{ik} = \frac{1}{s}$ для довільного $i \in A_k$, $k \in N$, то $\widetilde{Q}$-зображення є класичним s-ковим зображенням чисел відрізка $[0;1]$. Випадок $q_{ik} = \frac{1}{s_k}$ для будь-якого $i \in A_k$ приводить до класичної канторівської системи числення [11], у якій розклад числа в ряд набуває вигляду:

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + ... + \frac{\alpha_k}{s_1 s_2 ... s_k} + ...$$

Таким чином, $\widetilde{Q}$-кодування ($\widetilde{Q}$-зображення) чисел є узагальненням канторівської системи числення з послідовністю основ (s_k).

Зауважимо, що $\widetilde{Q}$-зображення забезпечує суттєво ширші можливості для конструювання математичних об'єктів (множин, функцій, мір, динамічних систем, перетворень простору) з локально складними властивостями структурного, варіаційного, диференціально-інтегрального та фрактального змісту.

Введемо позначення:
$\tau \equiv \inf\limits_k\{\min\limits_i\{q_{ik}\}\}$, $\xi \equiv \sup\limits_k\{\max\limits_i\{q_{ik}\}\}$.

Геометрія $\widetilde{Q}$-зображення: $\widetilde{Q}$-циліндри та їх застосування

Геометрію $\widetilde{Q}$-зображення розкривають властивості циліндрів. Нагадаємо, що циліндром рангу m з основою $c_1...c_m$ називають множину $\Delta_{c_1...c_m}$ чисел одиничного відрізка, перші m цифр $\widetilde{Q}$-зображення яких збігаються з c_1,...,c_m відповідно, тобто

$$\Delta_{c_1...c_m} = \{x = \Delta_{c_1...c_m i_1 ... i_n ...}, (i_n) \in L\}. \quad (2)$$

Циліндри ($\widetilde{Q}$-циліндри) мають властивості:

1) $\Delta_{c_1 c_2 ... c_k} = \bigcup\limits_{i=0}^{m_{k+1}} \Delta_{c_1 c_2 ... c_k i}$;
   $[0;1] = \bigcup\limits_{c_1=0}^{m_1} ... \bigcup\limits_{c_k=0}^{m_k} \Delta_{c_1...c_k}$;
2) $\widetilde{Q}$-циліндр $\Delta_{c_1 c_2 ... c_m}$ є відрізком з кінцями a і b:
$$a = a_{i_1 1} + \sum_{k=1}^{m}(a_{c_k k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j j}),\ b = a + \prod_{j=1}^{m} q_{c_j j};$$
3) $\max\Delta_{c_1 c_2 ... c_{k-1} i} = \min\Delta_{c_1 c_2 ... c_{k-1}[i+1]}$, $i \in \{0,1,...,m_k - 1\}$;
4) $\Delta_{c_1...c_k} = \Delta_{d_1...d_k} \Leftrightarrow c_i = d_i$, $i = \overline{1,k}$;
5) $\nabla_{c_1...c_k} \cap \nabla_{d_1...d_k...d_n} =$
$$= \begin{cases} \Delta_{d_1...d_k...d_n}, \text{ якщо } d_i = c_i, i = \overline{1,k} \\ \varnothing, \text{ якщо } d_i \ne c_i \text{ при } i < k, \end{cases}$$
   де $\nabla_{c_1...c_k}$ — внутрішність циліндра $\Delta_{c_1...c_k}$;
6) $|\Delta_{c_1 c_2 ... c_k}| = \prod\limits_{i=1}^{k} q_{c_i i}$;

7) $\frac{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_{k-1}i}|}{|\Delta_{c_1c_2\ldots c_{k-1}}|} = q_{ik}$;

8) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \Delta_{c_1c_2\ldots c_k\ldots} = x$.

Останню властивість забезпечує умова 3) для матриці $||q_{ik}||$.

Множини канторівського типу

Розглянемо множину

$$C[\widetilde{Q}; V_n] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in V_n \subset A_n\}.$$

Лема 1. *Якщо нерівність $V_n \neq A_n$ виконується лише скінченну кількість разів, то множина C є об'єднанням відрізків і є досконалою ніде не щільною множиною у протилежному випадку.*

Доведення. Якщо $V_n = A_n$ для всіх $n \geq n_0$, то множина C є об'єднанням $\widetilde{Q}$-циліндрів рангу n_0. Якщо ж $V_{n_k} = A_{n_k}$ і $j_k \in A_{n_k} \setminus V_{n_k}$, то $\nabla_{c_1\ldots c_{n_k-1}j_k} \cap C = \varnothing$. Тому в кожному як завгодно малому інтервалі (u, v) легко вказати йому належний $\widetilde{Q}$-циліндр, а в ньому циліндр, серед внутрішніх точок якого немає точок множини C. Отже, C — ніде не щільна згідно з означенням. Лему доведено.

Лема 2. *Міру Лебега множини обчислюють за формулою*

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{\lambda(\overline{F}_n)}{\lambda(F_{n-1})}),$$

де $F_0 = [0; 1]$, F_n — об'єднання $\widetilde{Q}$-циліндрів рангу n, серед внутрішніх точок яких є точки множини C,

$$\overline{F}_n \equiv F_{n-1} \setminus F_n.$$

Доведення. Очевидно, що $C \subset F_k \subset F_{k-1}$ для будь-якого $k \in N$,

$$C = \lim_{k\to\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k; \;\; \lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k).$$

Тоді

$$\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)} =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k} \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})}.$$

Оскільки $F_n = F_{n-1} \setminus \overline{F}_n$, то

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{n-1}) - \lambda(\overline{F}_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{\lambda(\overline{F}_n)}{F_{n-1}}).$$

Лему доведено.

Наслідок 3. $\lambda(C) = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \infty$.

Це твердження випливає з відомого факту про взаємозв'язок збіжності нескінченних добутків і рядів.

Наслідок 4. *Якщо послідовність (m_k) є обмеженою, $\tau > 0$ і нескінченну кількість разів виконується нерівність $V_n \neq A_n$, то $\lambda(C) = 0$.*

Нормальна властивість чисел

Лема 5. *Якщо послідовність (m_k) є сталою, $\tau > 0$ і $d_1 \ldots d_m$ — фіксований набір цифр, то міра Лебега множини*

$\overline{D[\widetilde{Q}, d_1 \ldots d_m]} = \{x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}, \overline{\alpha_k \ldots \alpha_{k+m}} = = \overline{d_1 \ldots d_m} \; \forall k \in N\}$ *дорівнює нулю.*

Доведення. Очевидно, що $\nabla_{d_1\ldots d_m} \cap D = \varnothing$. Розглянемо множину чисел $\overline{D_0 = \{x =} = \Delta_{[i_1\ldots i_m][i_{m+1}\ldots i_{2m}]\ldots}, \overline{i_{km+1} \ldots i_{[k+1]m}} \neq \overline{d_1 \ldots d_m}\}$.

Очевидно, що $D \subset D_0$. Покажемо, що $\lambda(D_0) = 0$. Нехай E_n — це об'єднання $\widetilde{Q}$-циліндрів рангу nm, серед внутрішніх точок яких є точки множини D_0,

$$E_0 = [0; 1], \; \overline{E}_n = E_{n-1} \setminus E_n.$$

Тоді $D_0 \subset E_n \subset E_{n-1}$, $D_0 = \lim\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$,

$$\lambda(D_0) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda(E_k)}{\lambda(E_{k-1})} =$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_k)}{\lambda(E_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{\lambda(\overline{E}_k)}{\lambda(E_{k-1})}).$$

Оскільки $\lambda(D_0) = 0$ тоді й тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{E}_k)}{\lambda(E_{k-1})} = \infty.$$

Через відокремленість елементів матриці $||q_{ik}||$ від нуля маємо, що $\frac{\lambda(\overline{E}_k)}{\lambda(E_{k-1})} > \varepsilon > 0$ для деякого ε.

Тому вказаний ряд є розбіжним, а отже, $\lambda(D_0) = 0$. Лему доведено.

Наслідок 6. *При виконанні умов леми множина $D_1 = \{x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_k \ldots \alpha_{k+m} \neq \neq d_1 \ldots d_m$ для $k \geq k_0\}$ має нульову міру Лебега.*

Теорема 7. *Якщо послідовність (m_k) є сталою ($m_k = s - 1$) і $\tau > 0$, то всі (у розумінні міри Лебега) числа відрізка $[0; 1]$ у своїх $\widetilde{Q}$-зображеннях довільно вибраний набір цифр $c_1 \ldots c_m$ містить нескінченну кількість разів.*

Доведення. Якщо E — множина чисел, у $\widetilde{Q}$ яких набір цифр $c_1 \ldots c_m$ як послідовні цифри зображення фігурує лише скінченну кількість разів, то згідно з попередньою лемою $\lambda(E) = 0$. Тоді множина $H \equiv [0; 1] \setminus E$ є множиною повної міри, тобто $\lambda(H) = 1$. Теорему доведено.

Застосування: розподіли випадкових величин

Лема 8. *Якщо X — випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[0; 1]$, то цифри її $\widetilde{Q}$–зображення є незалежними випадковими величинами, які мають розподіли*

$$P\{\tau_k = i\} = q_{ik}.$$

Доведення. Оскільки X — рівномірно розподілена випадкова величина на $[0;1]$, то

$P\{\tau_1 = i\} = |\Delta_i| = q_{i1}$,

$$P\{\tau_k = i\} = P\{X \in \bigcup_{i_1=0}^{m_1} ... \bigcup_{i_{k-1}=0}^{m_{k-1}} \Delta_{i_1 ... i_{k-1} i}\} = \\ = \sum_{i_1=0}^{m_1} ... \sum_{i_{k-1}=0}^{m_{k-1}} |\Delta_{i_1 ... i_{k-1} i}| = q_{ik}.$$

Незалежність цифр τ_k очевидна, оскільки $P\{\tau_k = i/\tau_1 = i_1, ..., \tau_{k-1} = i_{k-1}\} = P\{\tau_k = i\}$. Лему доведено.

Нехай (ζ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які мають розподіли:

$P\{\zeta_n = i\} = p_{in} \geq 0,\ i = \overline{0, m_n},\ n \in N$;

$M \equiv \prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i \{p_{in}\},\ L \equiv \lambda(C_+)$,

$C_+ \equiv C[\widetilde{Q}, V_n] = \{x = \Delta_{i_1 ... i_n ...}, p_{i_n n} > 0, n \in N\}$.

Теорема 9. *Якщо $M > 0$, то розподіл випадкової величини $\zeta = \Delta_{\zeta_1 \zeta_2 ... \zeta_n ...}$ є дискретним. Якщо $M = 0 = L$, то він є сингулярним розподілом канторівського типу.*

Доведення. Якщо $\Delta_{c_1 ... c_n ...} = x_0$ — $\widetilde{Q}$-унарна точка, то

$$P\{\zeta = x_0\} = P\{\zeta_n = c_n,\ n \in N\} = \prod_{n=1}^{\infty} p_{c_n n}.$$

Якщо x_0 — $\widetilde{Q}$-бінарна точка, тобто

$x_0 = \Delta_{c_1 ... c_k (0)} = \Delta_{c_1 ... c_{k-1} [c_k - 1] (m_{k+n})}$, то

$P\{\zeta = x_0\} = P\{\zeta_1 = c_1, ..., \zeta_k = c_k, \zeta_{k+1} = = 0 = \zeta_{k+n}\ \forall n \in N\} + P\{\zeta_1 = c_1, ..., \zeta_k = = c_k, \zeta_{k+1} = m_{k+1}, \zeta_{k+2} = m_{k+2}, ...\}$, причому один з доданків останньої суми рівний 0.

Враховуючи сказане, за умови $M > 0$ $P\{\zeta = x_*\} > 0,\ x_* = \Delta_{c_1 ... c_n ...},\ p_{e_k k} = \max\limits_i \{p_{ik}\}$.

Тоді атомами розподілу випадкової величини ζ є всі точки x, $\widetilde{Q}$-зображення яких лише скінченною кількістю цифр відрізняються від відповідних цифр $\widetilde{Q}$-зображення x_*.

Оскільки сума всіх атомів розподілу ζ дорівнює 1, то ζ за умови $M > 0$ має чисто дискретний розподіл.

Якщо $M = 0$, то $P\{\zeta = x_0\} \leq P\{\zeta = x_*\} = 0$, а отже, розподіл ζ є неперервним. Але, бувши зосередженим при $L = 0$ на ніде не щільній множині канторівського типу, яка має міру Лебега 0 (згідно з лемою 2), ξ має сингулярний розподіл канторівського типу. Теорему доведено.

Застосування у теорії фракталів

Лема 10. *Якщо $\tau > 0$ і послідовність (m_k) обмежена зверху, причому $\max\{m_k\} = M$, то для довільного відрізка $u \subset [0;1]$ існує не більше ніж $b = 2M^p$, де p — найменше натуральне число, що задовольняє нерівність $\xi^p \leq \tau$, $\widetilde{Q}$-циліндрів, які покривають u і мають довжину не більшу ніж довжина u.*

Доведення. Якщо відрізок u сам є $\widetilde{Q}$-циліндром, то достатньо одного циліндра для покриття u, яке задовольняє вказані умови. Якщо це не так, то існує циліндр $\Delta_{c_1 ... c_k}$ мінімального рангу k, який цілком належить відрізку u, тобто жоден циліндр $(k-1)$-го рангу не є підмножиною u. Тоді існує два $\widetilde{Q}$-циліндри ω_0 і ω_1 рангу $(k-1)$, об'єднання яких містить u (але не має гарантії, що їх діаметри менші ніж $|u|$). Нехай $\max \omega_0 = = \min \omega_1$, $u_0 = \omega_0 \cap u$, $u_1 = \omega_1 \cap u$. Одному з відрізків u_0 та u_1 належить циліндр $\Delta_{c_1 ... c_k}$.

Проведемо загальні міркування стосовно відрізка u_0, незважаючи на те, чи належить йому циліндр $\Delta_{c_1 ... c_k}$, чи ні. Для відрізка u_1 вони аналогічні.

Очевидно, що існує $\widetilde{Q}$-циліндр $\Delta_{b_1 ... b_n m_{n+1}}$ мінімального рангу $n+1$, який цілком належить u_0 (у частинному випадку це міг бути циліндр $\Delta_{c_1 ... c_k}$), тобто жоден з циліндрів рангу n не належить u_0 цілком. Тоді циліндр $\Delta_{b_1 ... b_n}$ покриває u_0. Він є об'єднанням $\widetilde{Q}$-циліндрів рангу $(m+p)$, їх кількість є добутком $m_{n+1} \cdot m_{n+2} \cdot ... \cdot m_{n+p} \leq M^p$.

Оскільки $\xi^p \leq \tau$, то кожен з цих циліндрів рангу $(n+p)$ має довжину, що не перевищує довжини циліндра $\Delta_{b_1 ... b_n m_{n+1}}$, а отже, і довжини u_0. Таким чином, для покриття u_0 достатньо не більше ніж M^p $\widetilde{Q}$-циліндрів. Такої ж кількості циліндрів достатньо для покриття відрізка u_1. Лему доведено.

Теорема 11. *Якщо E — довільна підножина відрізка $[0;1]$, $W_{\widetilde{Q}}$ — множина всіх $\widetilde{Q}$-циліндрів скінченного рангу, то число*

$$\alpha_* = \inf\{\alpha : \hat{H}^{\alpha}(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \hat{H}^{\alpha}(E) = \infty\},$$

де $\hat{H}^{\alpha}(E) = \sup\limits_{\varepsilon > 0} \{\inf\limits_{|\omega_i| \leq \varepsilon} \sum\limits_i |\omega_i|^{\alpha} : E \subset \bigcup\limits_i \omega_i, \omega_i \in \in W_{\widetilde{Q}}\}$, *дорівнює фрактальній розмірності Гаусдорфа–Безиковича множини E.*

Доведення. Покажемо, що для довільної множини $E \subset [0;1]$ виконується

$$m_{\varepsilon}^{\alpha}(E) \leq l_{\varepsilon}^{\alpha}(E) \leq 2M^p m_{\varepsilon}^{\alpha}(E),$$

де $m_{\varepsilon}^{\alpha}(E) = \inf\limits_{|u_i| \leq \varepsilon} \{\sum\limits_i |u_i|^{\alpha} : \bigcup u_i \supset E\}$,

$l_{\varepsilon}^{\alpha}(E) = \inf\limits_{|\omega_i| \leq \varepsilon} \{\sum\limits_i |\omega_i|^{\alpha} : \bigcup u_i \supset E\}$.

Ліва нерівність є очевидною, оскільки клас покриттів, які беруть участь у конструкції m_{ε}^{α}, ширший, ніж клас покриттів $\widetilde{Q}$-циліндрами.

Права нерівність випливає з леми 10.

Справді, нехай $\bigcup u_i$ — довільне ε-покриття множини E відрізками, $\sum |u_i|^{\alpha}$ — α-об'єм цього покриття.

Згідно з попередньою лемою, існує покриття $\bigcup \omega_i$ відрізка $2M^p$ циліндрами з довжинами, що не перевищують $|u|$, отримуємо покриття з α-об'ємом $2m^p \sum\limits_i |u_i|$.

Отже, $\sum\limits_i |\omega_i|^\alpha \leq 2M^p \sum\limits_i |u_i|^\alpha$ і $l_\varepsilon^\alpha(E) \leq 2M^p m_\varepsilon^\alpha(E)$.

Виконавши граничний перехід по $\varepsilon \to 0$, маємо

$$H^\alpha(E) \leq \hat{H}^\alpha(E) \leq 2M^p H^\alpha(E).$$

Звідки бачимо, що $\hat{H}^\alpha(E)$ і $H^\alpha(E)$ одночасно перетворюються на нуль та нескінченність, а отже, фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(E)$ дорівнює числу α_*. Теорему доведено.

Основний об'єкт дослідження

Розглянемо функцію, визначену рівністю

$$I(x = \Delta_{i_1 \ldots i_n \ldots}) = \Delta_{[m_1 - i_1] \ldots [m_n - i_n] \ldots}. \tag{3}$$

Функція I, визначена рівністю (3), є коректно означеною, оскільки для $k \in N$ має місце

$$I(\Delta_{i_1 \ldots i_n (0)}) = \Delta_{[m_1 - i_1] \ldots [m_n - i_n](m_{n+k})} =$$
$$= \Delta_{[m_1 - i_1] \ldots [m_n - i_n + 1](0)} = I(\Delta_{i_1 \ldots [i_n - 1](m_{n+k})}).$$

Лема 12. *Інверсор I цифр $\widetilde{Q}$-зображення чисел є неперервною строго спадною функцією на* $[0;1]$.

Доведення. Для доведення неперервності функції I в точці x_0 покажемо, що виконується рівність

$$\lim_{x_n \to x_0} |I(x_n) - I(x_0)| = 0 \tag{4}$$

у $\widetilde{Q}$-бінарних і $\widetilde{Q}$-унарних точках. Нехай $x_0 = \Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n \ldots}$ — довільна $\widetilde{Q}$-унарна точка області визначення. Виберемо як послідовність $x_n = \Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} i'_n \ldots}$, де $i_n \neq i'_n$. Тоді $x_n \to x_0 \Leftrightarrow n \to \infty$.

Оскільки

$I(x_0) = I(\Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n \ldots}) =$
$= \Delta_{[m_1 - i_1] \ldots [m_{n-1} - i_{n-1}][m_n - i_n] \ldots}$;
$I(x_n) = I(\Delta_{i_1 \ldots i_{n-1} i'_n \ldots}) =$
$= \Delta_{[m_1 - i_1] \ldots [m_{n-1} - i_{n-1}][m_n - i'_n] \ldots}$,

то очевидно, що

$\lim\limits_{x_n \to x_0} |I(x_n) - I(x_0)| =$
$= \lim\limits_{n \to \infty} |\Delta_{[m_1 - i_1] \ldots [m_{n-1} - i_{n-1}][m_n - i'_n] \ldots} -$
$- \Delta_{[m_1 - i_1] \ldots [m_{n-1} - i_{n-1}][m_n - i_n] \ldots}| = 0$.

Отже, функція I є неперервною на множині $\widetilde{Q}$-унарних чисел. Неперервність функції на множині $\widetilde{Q}$-бінарних чисел є наслідком коректності означення функції.

Покажемо, що функція є строго спадною на всій області визначення. Розглянемо

$x_1 = \Delta_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k \ldots} < x_2 = \Delta_{i_1 \ldots i_{k-1} i'_k \ldots}$,
причому $i_k(x_1) < i'_k(x_2)$ і якщо
$i_k(x+1) = i'_k(x_1) - 1$,
то існує $n \in N$ таке, що
$(i_{k+n}(x_1); i_{k+n}(x_2)) \neq (m_{k+n}; 0)$.

Тоді

$I(x_1 = \Delta_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k \ldots}) - I(x_1 = \Delta_{i_1 \ldots i_{k-1} i'_k \ldots}) =$
$= \Delta_{[m_1 - i_1] \ldots [m_{k-1} - i_{k-1}][m_k - i_k] \ldots} -$
$- \Delta_{[m_1 - i_1] \ldots [m_{k-1} - i_{k-1}][m_k - i'_k] \ldots}$.

Звідки маємо, що $m_k - i_k > m_k - i'_k$. Оскільки відповідні цифри значення функції перебувають у відношенні більше, то $I(x_1) > I(x_2)$. Причому $I(x_1) = I(x_2)$ лише, тоді коли

$m_k - i_k = m_k - i'_k + 1$ і
$(m_{k+n} - i_{k+n}(x_1); (m_{k+n} - i_{k+n}(x_2)) = (0; m_{k+n})$

для будь-якого $n \in N$, що суперечить тому, що $x_1 \neq x_2$. Отже, функція $I(x)$ є строго монотонною, причому строго спадною.

Диференціальні властивості функції

Лема 13. *Якщо для елементів «матриці» $||q_{ik}||$ виконуються рівності*

$$q_{i_n n} = q_{[m_n - i_n] n}, \ n \in N, \tag{5}$$

то

$$a_{m_n - i_n} = 1 - a_{i_n + 1}, \ n \in N. \tag{6}$$

Доведення. Справді, має місце ряд перетворень

$$\begin{aligned} a_{m_k - i_k} &= q_{0k} + q_{1k} + \ldots + q_{[m_k - i_k - 1]k} = \\ &= q_{m_k k} + q_{[m_k - 1]k} + \ldots + q_{[i_k + 1]k} = \\ &= 1 - (q_{0k} + q_{1k} + \ldots + q_{ik}) = 1 - a_{i_k + 1}, \end{aligned}$$

оскільки виконуються $q_{i_k k} = q_{[m_k - i_k]k}$, $k \in N$.

Теорема 14. *Інверсор є лінійною функцією $I(x) = 1 - x$ тоді й тільки тоді, коли для елементів «матриці» $||q_{ik}||$ виконуються рівності* (5).

Доведення. Доведемо спочатку, що якщо мають місце рівності (5), то $I(x) = 1 - x$. Нехай мають місце рівності (5), тоді згідно з попередньою лемою має місце ряд перетворень

$$\begin{aligned} I(x) &= I(\Delta_{i_1 i_2 i_3 \ldots}) = a_{m_1 - i_1} + a_{m_2 - i_2} q_{[m_1 - i_1]1} + \\ &+ a_{m_3 - i_3} q_{[m_1 - i_1]1} q_{[m_2 - i_2]2} + \ldots = \\ &= 1 - a_{i_1 + 1} + (1 - a_{i_2 + 1}) q_{i_1 1} + \\ &+ (1 - a_{i_3 + 1}) q_{i_1 1} q_{i_2 2} + \ldots = \\ &= 1 - a_{i_1} - q_{i_1 1} + (1 - a_{i_2} - q_{i_2 2}) q_{i_1 1} + \\ &+ (1 - a_{i_3} - q_{i_3 3}) q_{i_1 1} q_{i_2 2} + \ldots = \\ &= 1 - a_{i_1} - q_{i_1 1} + q_{i_1 1} - a_{i_2} q_{i_1 1} - q_{i_1 1} q_{i_2 2} + \\ &+ q_{i_1 1} q_{i_2 2} - a_{i_2} q_{i_1 1} q_{i_2 2} - q_{i_1 1} q_{i_2 2} q_{i_3 3} - \ldots = \\ &= 1 - a_{i_1} - a_{i_2} q_{i_1 1} - a_{i_3} q_{i_1 1} q_{i_2 2} - \ldots = 1 - x. \end{aligned}$$

Тепер покажемо, що коли $I(x) = 1 - x$, то мають місце рівності (5). Розглянемо вираз

$$
\begin{aligned}
&I(x=\Delta_{i_1i_2i_3\ldots})=\Delta_{[m_1-i_1][m_2-i_2][m_3-i_3]\ldots}=\\
&=a_{m_1-i_1}+a_{m_2-i_2}q_{[m_1-i_1]1}+\\
&+a_{m_3-i_3}q_{[m_1-i_1]1}q_{[m_2-i_2]2}+\ldots=\\
&=(1-q_{[m_1-i_1]1}-q_{[m_1-i_1+1]1}-\ldots-q_{m_11})+\\
&+(1-q_{[m_2-i_2]2}-q_{[m_2-i_2+1]2}-\ldots-q_{m_22})\cdot\\
&\cdot q_{[m_1-i_1]1}+\\
&+(1-q_{[m_3-i_3]3}-q_{[m_3-i_3+1]3}-\ldots-q_{m_33})\cdot\\
&\cdot q_{[m_1-i_1]1}q_{[m_2-i_2]2}+\ldots=\\
&=1-q_{[m_1-i_1]1}-q_{[m_1-i_1+1]1}-\ldots-q_{m_11}+\\
&+q_{[m_1-i_1]1}-\\
&-(q_{[m_2-i_2]2}+q_{[m_2-i_2+1]2}+\ldots+q_{m_22})\cdot\\
&\cdot q_{[m_1-i_1]1}+q_{[m_1-i_1]1}q_{[m_2-i_2]2}-\\
&-(q_{[m_3-i_3]3}+q_{[m_3-i_3+1]3}+\ldots+q_{m_33})\cdot\\
&\cdot q_{[m_1-i_1]1}q_{[m_2-i_2]2}+\ldots,
\end{aligned}
$$

і вираз

$$
\begin{aligned}
&I(x=\Delta_{i_1i_2i_3\ldots})=\\
&=1-\Delta_{i_1i_2i_3\ldots}=1-a_{i_1}-a_{i_2}q_{i_11}-\ldots=\\
&=1-(q_{01}+q_{11}+\ldots+q_{[i_1-1]1})-\\
&-(q_{02}+q_{12}+\ldots q_{[i_2-1]2})q_{i_11}-\\
&-(q_{03}+q_{13}+\ldots q_{[i_3-1]3})q_{i_11}q_{i_22}-\ldots
\end{aligned}
$$

оскільки ця рівність виконується для будь-якого $i_n\in A_n$, то одночасно мають місце рівності:
$1-q_{[m_1-i_1+1]1}-\ldots-q_{m_11}=$
$=1-(q_{01}+q_{11}+\ldots+q_{[i_1-1]1})$,
$(q_{[m_2-i_2+1]2}+\ldots+q_{m_22})q_{[m_1-i_1]1}=$
$=(q_{02}+q_{12}+\ldots+q_{[i_2-1]2})q_{i_11}$,
$(q_{[m_3-i_3+1]3}+\ldots+q_{m_33})q_{[m_1-i_1]1}q_{[m_2-i_2]2}=$
$=(q_{03}+q_{13}+\ldots+q_{[i_3-1]3})q_{i_11}q_{i_22}$,
і т.д.

Звідки $q_{[m_1-i_1]1}=q_{i_11}$, $q_{[m_2-i_2]2}=q_{i_22}$, ..., що й треба було довести.

Лема 15. *Якщо для елементів «матриці» $||q_{ik}||$ мають місце рівності*

$$
\begin{cases}
q_{[m_1-i_1]1}\neq q_{i_11},\\
q_{[m_n-i_n]n}=q_{i_nn}, n=2,3,\ldots,
\end{cases}\tag{7}
$$

то функція є лінійною на циліндрах 1-го рангу, тобто функцією виду

$$I(x)=a_{m_1-i_1(x)+1}-\frac{q_{[m_1-i_1(x)]1}}{q_{i_1(x)1}}(x-a_{i_1(x)}).$$

Доведення. Справді, оскільки мають місце ряд рівностей

$$
\begin{aligned}
&I(x=\Delta_{i_1i_2i_3\ldots})=\\
&=a_{m_1-i_1}+a_{m_2-i_2}q_{[m_1-i_1]1}+\ldots=\\
&=a_{m_1-i_1}+(1-a_{i_2}-q_{i_22})q_{[m_1-i_1]1}+\ldots=\\
&=a_{m_1-i_1}+q_{[m_1-i_1]1}-\\
&-a_{i_2}2q_{[m_1-i_1]1}-q_{[m_1-i_1]1}q_{i_22}+\ldots=\\
&=a_{m_1-i_1+1}-\frac{q_{[m_1-i_1]1}}{q_{i_11}}(-a_{i_1}+a_{i_1}+a_{i_2}q_{i_11}+\ldots)=\\
&=a_{m_1-i_1+1}-\frac{q_{[m_1-i_1]1}}{q_{i_11}}(x-a_{i_1}),
\end{aligned}
$$

то очевидно, що функція $I(x)$ за умови виконання рівностей (7) є лінійною на кожному циліндрі першого рангу.

Наслідок 16. *Якщо для елементів «матриці» $||q_{ik}||$ виконуються рівності*

$$
\begin{cases}
q_{[m_k-i_k]1}\neq q_{i_kk},\ k=\overline{1,2,\ldots,n-1}\\
q_{[m_n-i_n]n}=q_{i_nn}, 1\neq n\in N,
\end{cases}\tag{8}
$$

то інверсор $I(x)$ є кусково-лінійною функцією, причому лінійною на циліндрах $(n-1)$-го рангу
$I(x)=\sum\limits_{k=1}^{n-2}a_{m_k-i_k}\prod\limits_{j=1}^{k-1}q_{[m_j-i_j]}+$
$+a_{m_{n-1}-i_{n-1}+1}\prod\limits_{j=1}^{n-2}q_{[m_j-i_j]j}+$
$+\prod\limits_{j=1}^{n-1}\frac{q_{[m_j-i_j]j}}{q_{i_jj}}(x-\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_{i_k}\prod\limits_{j=1}^{k-1}q_{i_jj})$.

Лема 17. *Якщо в $\widetilde{Q}$-унарній точці $x_0=$ $=\Delta_{i_1\ldots i_n\ldots}$ існує похідна $I'(x_0)$ функції I, то її можна знайти за формулою*

$$I'(x_0)=-\prod_{n=1}^{\infty}\frac{q_{[m_n-i_n]n}}{q_{i_nn}}.\tag{9}$$

Твердження випливає з теореми 3.11.1 з [8], оскільки у випадку існування похідної

$$I'(x_0)=-\lim_{n\to\infty}\frac{|\Delta_{[m_1-i_1]\ldots[m_n-i_n]}|}{|\Delta_{i_1\ldots i_n}|}.$$

Теорема 18. *Якщо послідовність (m_k) є сталою $(m_k=m)$ і $\lim\limits_{k\to\infty}q_{ik}=q_i$, $i=\overline{0,m}$, причому існує таке s, що $q_s\neq\frac{1}{m+1}$, то функція $I'(x)=$ $=0$ майже скрізь.*

Доведення. Оскільки функція I є монотонною, то майже в усіх точках відрізка $[0;1]$ вона згідно з відомою теоремою Лебега має скінченну похідну. Множину таких точок позначимо через E. Множина H всіх точок, які у своїх $\widetilde{Q}$-зображеннях цифру s використовують нескінченну кількість рядів, є множиною повної міри Лебега.

Тоді множина $W = R \cap H$ є множиною повної міри Лебега. Якщо $x \in W$, то $I'(x_0) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{q_{[m_n - i_n]n}}{q_{i_n n}} = 0$, оскільки необхідна умова збіжності нескінченного добутку (прямування його n-го члена до 1) не виконується, то він збігається до скінченного числа 0. Отже, $I'(x) = 0$ майже скрізь, що і треба було довести.

Наслідок 19. *$I(x)$ є неперервною строго спадною сингулярною функцією.*

Фрактальні властивості функції I

Далі розглядається випадок, коли послідовність (m_k) є сталою. Нехай для елементів «матриці» $||q_{ik}||$ для деякого $k \in N$ і довільного $n \in N$ мають місце рівності:

$$\begin{cases} q_{i,kn-1} = g_i^1, \\ q_{i,kn-2} = g_i^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{i,kn-k+1} = g_i^{k-1}, \\ q_{i,kn} = g_i^k. \end{cases} \tag{10}$$

Розглянемо функцію, визначену рівністю:

$$\omega^k(\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n \dots}) = \Delta_{i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n-k} \dots}. \tag{11}$$

Функція ω^k не є коректно означеною для чисел, що мають два $\widetilde{Q}$-зображення ($\widetilde{Q}$-бінарних чисел), оскільки має місце рівність:

$$\omega^k(\Delta_{i_1 \dots i_k (0)}) = \Delta_{(0)} \neq$$
$$\neq \omega^k(\Delta_{i_1 \dots [i_k - 1](m_{n+k})}) = \Delta_{m_{k+1} m_{k+2} \dots}.$$

Задля коректності означення функції ω^k домовимося надалі використовувати лише одне із двох наявних $\widetilde{Q}$-бінарних зображень числа, а саме те, що містить 0 у періоді.

Функцію ω^k у випадку, коли мають місце рівності (10), називають *оператором лівостороннього зсуву* цифр $\widetilde{Q}$-зображення.

Зауважимо, що коли для «матриці» $\widetilde{Q}$-зображення хоча б одна з умов (10) не виконується, то аргумент і значення функції ω^k мають різні $\widetilde{Q}$-зображення.

Лема 20. *Функція ω^k аналітично виражається:*

$$\omega^k(x = \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1} \dots}) = \tag{12}$$
$$= \prod_{j=1}^{k} q_{i_j j}^{-1} \left(x - \sum_{m=1}^{k} (a_{i_m m} \prod_{j=2}^{m-1} q_{i_j j}) \right).$$

Вона є кусково-лінійною, причому лінійною на кожному циліндрі k-го рангу.

Доведення. Розглянемо ланцюг перетворень

$$x = \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x) i_{k+1}(x) \dots} =$$
$$= \sum_{m=1}^{k} \left(a_{i_m m} \prod_{j=2}^{m-1} q_{i_j j} \right) +$$
$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(a_{i_m m} \prod_{j=2}^{m-1} q_{i_j j} \right) =$$
$$= \sum_{m=1}^{k} \left(a_{i_m m} \prod_{j=2}^{m-1} q_{i_j j} \right) + \prod_{j=1}^{k} q_{i_j j} \cdot$$
$$\cdot \left[\sum_{k=m+1}^{\infty} \left(a_{i_m m} \prod_{j=k+1}^{m-1} q_{i_j j} \right) \right] =$$
$$= \sum_{m=1}^{k} \left(a_{i_m m} \prod_{j=2}^{m-1} q_{i_j j} \right) + \omega(x) \prod_{j=1}^{k} q_{i_j j}().$$

Звідси маємо, що

$$\omega^k(x) = \frac{x - \sum\limits_{m=1}^{k} (a_{i_m m(x)} \prod\limits_{j=2}^{m-1} q_{i_j j}(x))}{\prod\limits_{j=1}^{k} q_{i_j j(x)}},$$

а тому має місце формула (12).

Оскільки вирази $\prod\limits_{j=1}^{k} q_{i_j j}^{-1}(x)$ і

$$\sum_{m=1}^{k} (a_{i_m}(x) \prod_{j=2}^{m-1} q_{i_j j}(x))$$

залежать від цифр $i_1(x)$, $i_2(x)$,..., $i_k(x)$ і не залежать від усіх решти цифр аргумента, то на кожному циліндрі $\Delta_{i_1(x) i_(x) \dots i_k(x)}$ рангу k вирази набувають сталих значень, а тому функція $\omega^k(x)$ на кожному такому циліндрі є лінійною і в усій області визначення кусково-лінійною.

Розглянемо функцію $\delta_{e_1 e_2 \dots e_k}$, означену рівністю:

$$\delta_{e_1 \dots e_k}(x = \Delta_{i_1 i_2 \dots i_n \dots}) = \Delta_{e_1 \dots e_k i_1 i_2 \dots i_n \dots}. \tag{13}$$

Функція $\delta_{e_1 e_2 \dots e_k}$ є коректно означеною для чисел, що мають два $\widetilde{Q}$-зображення.

Функцію $\delta_{e_1 e_2 \dots e_k}$ у випадку, коли мають місце рівності (10), називають *оператором правостороннього зсуву* цифр $\widetilde{Q}$-зображення.

Зауважимо, що коли для «матриці» Q-зображення хоча б одна з умов (10) не виконується, то аргумент і значення функції $\delta_{e_1 e_2 \dots e_k}$ мають різні $\widetilde{Q}$-зображення.

Лема 21. *Функція $\delta_{e_1...e_k}$ аналітично виражається:*

$$\delta_{e_1...e_k}(x = \Delta_{i_1...i_n...}) = \tag{14}$$
$$= x\prod_{j=1}^{k} q_{e_j j} + \sum_{m=1}^{k}(a_{e_m}\prod_{j=2}^{m-1} q_{e_j j}).$$

Вона є лінійною, строго зростаючою на всій області визначення.

Доведення. Розглянемо ланцюг перетворень

$$\delta_{e_1e_2...e_k}(x = \Delta_{i_1i_2...i_n...}) = \Delta_{e_1e_2...e_k i_1 i_2...i_n...} =$$
$$= \sum_{m=1}^{k}(a_{e_m}\prod_{j=2}^{m-1} q_{e_j j}) + \sum_{k=m+1}^{\infty}(a_{i_m}\prod_{j=2}^{m-1} q_{i_j j}) =$$
$$= \sum_{m=1}^{k}(a_{e_m}\prod_{j=2}^{m-1} q_{e_j j}) + \prod_{j=1}^{k} q_{e_j j}\cdot$$
$$\cdot[\sum_{k=m+1}^{\infty}(a_{i_m}(x)\prod_{j=k+1}^{m-1} q_{i_j j}(x))] =$$
$$= \sum_{m=1}^{k}(a_{e_m}\prod_{j=2}^{m-1} q_{e_j j}) +$$
$$+ \prod_{j=1}^{k} q_{e_j j}[\sum_{k=1}^{\infty}(a_{i_m}(x)\prod_{j=k+1}^{m-1} q_{i_j j}(x))] =$$
$$= \sum_{m=1}^{k}(a_{e_m}\prod_{j=2}^{m-1} q_{e_j j}) + x\prod_{j=1}^{k} q_{e_j j}.$$

Оскільки вираз функції $\delta_{e_1e_2...e_k}$ має вигляд $\delta_{e_1e_2...e_k}(x) = Ax+B$, де значення $A = \prod\limits_{j=1}^{k} q_{e_j j} = Const > 0$, $B = \sum\limits_{m=1}^{k}\left(a_{e_m}\prod\limits_{j=2}^{m-1} q_{e_j j}\right) = Const$ за фіксованого набору $e_1e_2...e_k$, то $\delta_{e_1e_2...e_k}$ є строго зростаючою лінійною функцією.

Теорема 22. *Якщо для елементів «матриці» $\widetilde{Q}$-зображення мають місце рівності* (10), *то графік Γ функції I є самоафінною множиною з самоафінною структурою*

$$\Gamma = \bigcup_{e_1=0}^{m_1}\bigcup_{e_2=0}^{m_2}...\bigcup_{e_k=0}^{m_k}\Gamma_{e_1...e_k}, e_k \in N^{\infty}_{m_k} \tag{15}$$

де $\Gamma_{e_1...e_k} = f_{e_1...e_k}(\Gamma) = \{(x;y) \in R^2 : x = \Delta_{e_1...e_k i_1...i_n...}, y = I(x)\}$,

$$f_{e_1...e_k} : \begin{cases} x' = \delta_{e_1...e_k}(\Delta_{i_1i_2...i_n...}), \\ y' = \delta_{[m_1-e_1]...[m_n-e_n]}(\Delta_{[m_1-i_1]...}), \end{cases},$$

$(e_1...e_k) \in A_1 \times ... \times A_k$.

Загальна схема обґрунтування аналогічна до доведення цього факту для Q_2^*-зображення [1].

Наслідок 23. *Самоафінна розмірність графіка Γ функції I є розв'язком рівняння*

$$\sum_{e_1=0}^{m_1}...\sum_{e_k=0}^{m_k}(\prod_{j=1}^{k}(q_{e_j j}q_{[m_j-e_j]j})^{\frac{x}{2}}) = 1. \tag{16}$$

Справді, оскільки $\Gamma_{e_1e_2...e_k} \overset{f_{e_1e_2...e_k}}{\to} \Gamma$, де $f_{e_1...e_k}$ — афінне перетворення, що задається формулами

$$\begin{cases} x' = x\prod\limits_{j=1}^{k} q_{e_j j} + \sum\limits_{t=1}^{k}(a_{e_t}\prod\limits_{j=2}^{t-1} q_{e_j j}) \\ y' = y\prod\limits_{j=1}^{k} q_{[m_j-e_j]j} + \sum\limits_{t=1}^{k}(a_{[m_t-e_t]}\prod\limits_{j=2}^{t-1} q_{[m_j-e_j]j}), \end{cases}$$

то згідно з означенням розмірності самоафінної множини маємо рівняння (16).

Список літератури

1. Pratsiovytyi M. V., Goncharenko Ya. V., Dyvliash N. V., Ratushniak S. P. Inversor of digits of Q_2^*-representation of numbers. *Matematychni Studii.* 2021. Vol. 55, No. 1. Pp. 37–43.
2. Pratsiovytyi M. V., Goncharenko Ya. V., Lysenko I. M., Ratushniak S. P. Continued A_2-fractions and singular functions. *Matematychni Studii.* 2022. Vol. 58, No. 1. Pp. 3–12.
3. Cantor G. Ueber die einfachen Zahlensysteme. Z. *Mathl. Phys.* 1869. Bd. 14. S. 121–128.
4. Бондаренко О. І., Василенко Н. М., Працьовитий М. В. Канторівська двійково-фібоначчієва система числення у задачах теорії функцій. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України.* 2019. Т. 16, № 3. С. 173–185.
5. Працевитый Н. В. Распределения случайных величин с независимыми Q-символами. *Асимптотические и прикладные задачи случайных эволюций.* Киев : Ин-т математики АН УССР, 1990. С. 92–101.
6. Працьовитий М. В., Лещинський О. Л. Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\widetilde{Q}_{\infty}$-зображення. *Теор. ймов. та матем. стат.* 1997. № 57. С. 134–139.
7. Працьовитий М. В. Поліосновне $\widetilde{Q}$-представлення і фрактальні математичні об'єкти, з ним пов'язані. *Фрактальний аналіз та суміжні питання: зб. наук. пр. Ін-т математики НАН України, НПУ ім. М. П. Драгоманова.* Київ, 1998. № 2. С. 14–35.
8. Працьовитий М. В. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. Київ : Наукова думка, 2022. 316 с.
9. Працьовитий М. В., Скрипник С. В. Q_2-зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр.*Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* 2013. № 15. С. 134–143.
10. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. 296 с.
11. Ралко Ю. В. Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* 2009. № 10. С. 132–140.
12. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. Киев : Наук. думка, 1992. 208 с.

13. Франчук К. В. Про $\widetilde{Q}$-зображення дійсних чисел та деякі їх застосування. *Студентські фізико-математичні етюди.* 2022. № 22. С. 49–56.

References

1. M. V. Pratsiovytyi, Ya. V. Goncharenko, N. V. Dyvliash and S. P. Ratushniak, "Inversor of digits of Q_2^*-representation of numbers", Matematychni Studii. **55** (1), 37–43 (2021).
2. M. V. Pratsiovytyi, Ya. V. Goncharenko, I. M. Lysenko and S. P. Ratushniak, "Continued A_2-fractions and singular functions", Matematychni Studii. **58** (1), 3–12 (2022).
3. G. Cantor, "Ueber die einfachen Zahlensysteme", Z. Mathl. Phys. **14**, 121–128 (1869).
4. O. I. Bondarenko, N. M. Vasylenko and M. V. Pratsovytyi, "Kantorivska dviikovo-fibonachchiieva systema chyslennia u zadachakh teorii funktsii", Zbirnyk prats In-tu matematyky NAN Ukrainy. **16** (3), 173–185 (2019).
5. N. V. Pracevityj, "Raspredelenija sluchajnyh velichin s nezavisimymi Q-simvolami", in: *Asimptoticheskie i prikladnye zadachi sluchajnyh jevoljucij* (Kiev: In-t matematiki AN USSR, 1990), pp. 92–101.
6. M. V. Pratsovytyi and O. L. Leshchynskyi, "Vlastyvosti vypadkovykh velychyn, zadanykh rozpodilamy elementiv svoho $\widetilde{Q}_\infty$-zobrazhennia", Teor. ymov. ta matem. stat. **57**, 134–139 (1997).
7. M. V. Pratsovytyi, "Poliosnovne $\widetilde{Q}$-predstavlennia i fraktalni matematychni obiekty, z nym poviazani", in: *Fraktalnyi analiz ta sumizhni pytannia: zb. nauk. pr. In-t matematyky NAN Ukrainy, NPU im. M. P. Drahomanova*, № 2 (Kyiv, 1998), pp. 14–35.
8. M. V. Pratsovytyi, *Dvosymvolni systemy koduvannia diisnykh chysel ta yikh zastosuvannia* (Kyiv: Naukova dumka, 2022).
9. M. V. Pratsovytyi and S. V. Skrypnyk, "Q_2-zobrazhennia drobovoi chastyny diisnoho chysla ta inversor yoho tsyfr", Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Drahomanova. Seriia 1. Fizyko-matematychni nauky. **15**, 134–143 (2013).
10. M. V. Pratsovytyi, *Fraktalnyi pidkhid u doslidzhenniakh synhuliarnykh rozpodiliv* (Kyiv: NPU imeni M. P. Drahomanova, 1998).
11. Yu. V. Ralko, "Zobrazhennia chysel riadamy Kantora ta deiaki yoho zastosuvannia", Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Drahomanova. Seriia 1. Fizyko-matematychni nauky, **10**, 132–140 (2009).
12. A. F. Turbin and N. V. Pracevityj, *Fraktal'nye mnozhestva, funkcii, raspredelenija* (Kiev: Nauk. dumka, 1992).
13. K. V. Franchuk, "Pro $\widetilde{Q}$-zobrazhennia diisnykh chysel ta deiaki yikh zastsuvannia", Studentski fizyko-matematychni etiudy. **22**, 49–56 (2022).

M. Pratsiovytyi, O. Bondarenko, S. Ratushniak, K. Franchuk

Q̃-REPRESENTATION OF REAL NUMBERS AS A GENERALIZATION OF CANTOR NUMERAL SYSTEMS

We consider generalization of Cantor numeral system, which is determined by the sequence of bases (s_n), $1 < s_n \in N$, and the sequence of alphabets $A_n = \{0, 1, ..., s_n - 1\}$:

$$[0;1] \ni x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \dots s_n},\ \alpha_n \in A_n.$$

the so-called $\widetilde{Q}$-representation. It is defined by an infinite "matrix" $||q_{ik}||$, where $i \in A_i$, $k \in N$, having the properties

$$0 < q_{ik} < 1,\ \sum_{i=0}^{m_k} q_{ik} = 1,\ k \in N,\ \prod_{n=1}^{\infty} \max_i \{q_{ik}\} = 0,$$

namely

$$[0;1] \ni x = a_{i_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} [a_{i_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{i_j(x) j}] \equiv \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k \dots},\quad \text{where } a_{i_n n} = \sum_{j=0}^{i_n - 1} q_{jn},\ i_n \in A_n,\ n \in N.$$

The applications of this representation of numbers in the metric theory of numbers, the theory of distributions of random variables, the theory of locally complicated functions, and fractal analysis are studied.

For the set $C[\widetilde{Q}; V_n] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}, \alpha_n \in V_n \subset A_n\}$, we study its topological and metric structure and derive a formula for calculating its Lebesgue measure:

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{\lambda(\overline{F}_n)}{\lambda(F_{n-1})}),$$

where $F_0 = [0; 1]$, F_n is the union of $\widetilde{Q}$-cylinders of rank n, such that there are points of the set C among their interior points of the set C, $\overline{F}_n \equiv F_{n-1} \setminus F_n$.

A criterion and some sufficient conditions for this set to be a set of zero measure are found. Under additional conditions on the "matrix" $||q_{ik}||$, the normal property for $\widetilde{Q}$-representation of numbers is found ((i.e., almost all in the sense of Lebesgue measure numbers have this property). The obtained *results are used to establish the Lebesgue structure and the type of distribution of a random variable whose digits of $\widetilde{Q}$-representation are independent random variables. It is proved that the digits of the $\widetilde{Q}$-representation of a random variable uniformly distributed on* $[0;1]$ *are independent, and their distribution is given.*

If the cardinalities of the alphabets are finite and the elements of the "matrix" $||q_{ik}||$ *are bounded away from zero, it is proved that to calculate the Hausdorff-Besicovitch fractal dimension of subsets of the segment* $[0;1]$*, it is sufficient to cover them with $\widetilde{Q}$-cylinders:* $\Delta_{c_1\ldots c_m} = \{x : x = \ Delta_{c_1\ldots c_k i_1\ldots i_n\ldots}, i_n \in \in A_{k+n}\}$.

For inversor of digits of $\widetilde{Q}$-representation of numbers, that is, the function defined by equality $I(x = = \Delta_{i_1\ldots i_n\ldots}) = \Delta_{[m_1-i_1]\ldots[m_n-i_n]\ldots}$, $m_n \equiv s_n - 1$ *it is proved its continuity, strict monotonicity, and for certain cases, its singularity (the equality of the derivative to zero almost everywhere in the sense of the Lebesgue measure).*

Keywords: $\widetilde{Q}$-representation of numbers, $\widetilde{Q}$-binary numbers, $\widetilde{Q}$-unary numbers, Cantor numeral systems, cylinder, Hausdorff–Besicovitch dimension, normal property of numbers, cylindrical derivative, singular function.

Матеріал надійшов 12.10.2022