УДК 519.17

Тимошкевич Л. М., Когут М. В.

DOI: 10.18523/2617-70805202219-25

КЛАСИФІКАЦІЯ ЗЛІЧЕННИХ ГРАФІВ КОКСТЕРА ВІДНОСНО ІНДЕКСУ У ПРОМІЖКУ $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$

Досліджено структуру злічених графів Кокстера зі значенням індексу в проміжку від $\sqrt{\sqrt{5}+2}$ *до* $\frac{3}{\sqrt{2}}$. *Зокрема, такі графи є деревами, можуть мати щонайбільше одну позначку на ребрах, більшу за 3, і такі позначки не перевищують 6, можуть мати лише вершини степеня строго меншого за 5, і серед ребер, інцидентних вершині степеня 4, може бути лише одне, що інцидентне не висячій вершині. Також наведено ряд інших властивостей злічених графів Кокстера з індексами у вказаному проміжку.*

Ключові слова: нескінченний граф, граф Кокстера, індекс графа.

Вступ

Існує декілька підходів для розширення добре розвиненої спектральної теорії графів зі скінченного випадку на злічений, у роботі прийнято підхід B. Mohar (див. [1]). Індекси графів мають широке коло застосувань, зокрема, у теорії представлень, де розглядаються умови існування наборів підпросторів гільбертового простору, зв'язаних певними умовами (див. [2]). Обмеження на індекс графа впливають на саму структуру графа, в багатьох випадках можна навіть навести повний перелік можливих графів з такими обмеженнями (див. [3–5]). У роботі Л. М. Тимошкевич [5] знайдені всі злічені зв'язні графи Кокстера, індекси яких не перевищують $\sqrt{\sqrt{5}+2}$. У статті авторів Renee Woo, Arnold Neumaier [6] вивчалися скінченні графи з індексами у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$. Природним чином виникає задача класифікації різних типів злічених графів Кокстера зі значеннями індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

Основні означення та твердження

Під терміном *граф* розуміємо впорядковану пару $G = (V, E)$, в якій V — деяка непорожня множина (множина вершин), E — множина, яка складається з невпорядкованих пар різних елементів V (множина ребер).

Граф Кокстера $\mathbf{G}$ — це пара (G, f), де G — граф, f — відображення множини ребер графа G у множину, що складається з натуральних чисел, більших за 2, та символу ∞. Будемо казати, що G — граф, підпорядкований графу Кокстера $\mathbf{G} = (G, f)$.

Для простоти сприймання граф Кокстера представляють схемою, що зображує підпорядкований граф, приписуючи над кожним ребром e число $f(e)$, яке називатимемо «позначкою» на ребрі. Прийнято опускати приписування на ребрах числа 3. Такі ребра називатимемо непозначеними, а ребра з позначкою, що більша або дорівнює 4, — позначеними.

Злічений граф Кокстера — граф Кокстера зі зліченною множиною вершин. Для зручності будемо позначати множину всіх скінченних підграфів графа $\mathbf{G}$ через $Fin(\mathbf{G})$.

Нагадаємо, що спектр квадратної матриці порядку n — це множина її власних значень. Оскільки матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ скінченного графа $\mathbf{G}$ симетрична, то її спектр дійсний. Позначимо точки спектра (власні значення матриці) через λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ та розташуємо їх у незростаючому порядку $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. *Індексом* графа називають найбільше власне значення $\lambda_{\mathbf{G}}$. Спектр матриці суміжності будемо називати *спектром графа* $\mathbf{G}$ і позначати $\sigma(\mathbf{G})$. Спектр графа не залежить від способу нумерації його вершин та є інваріантом графа. Позначимо *характеристичний многочлен* матриці суміжності через $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|$.

Означення 1. *Індексом зліченного графа* називаємо додатне число або символ ∞, визначені рівністю

$$ind\,\mathbf{G} = \sup_{\mathbf{\Gamma} \in Fin(\mathbf{G})} ind\,\mathbf{\Gamma}$$

Твердження 1 ([4; 5]). $\mathbf{G}$ — *злічений зв'язний граф. При видаленні вершини або ребра, зменшенні мітки на ребрі графа* $\mathbf{G}$ *його індекс не збільшується.*

Твердження 2 ([4; 5]). $\mathbf{G}$ — *злічений зв'язний граф. При підрозбитті внутрішнього ребра графа* $\mathbf{G}$, *індекс не збільшується.*

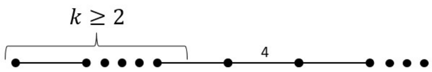
Наслідок 3 ([4; 5]). *Нехай* $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$ — *злічені* *графи.* $\mathbf{G_1} \subset \mathbf{G_2}$. *Тоді*

$$ind\,\mathbf{G_1} \leqslant ind\,\mathbf{G_2}.$$

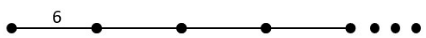
Класифікація злічених графів Кокстера відносно індексу в проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$

Теорема 4. *Нехай* $\mathbf{G}$ *— злічений зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим графом* A_∞, *то*

1. *Якщо* $ind\ \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, *то* $\mathbf{G}$ *— граф виду:*



2. *Якщо* $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, *то* $\mathbf{G}$ *— граф:*



Доведення. Коли на ланцюзі немає позначок, то $ind\ \mathbf{G} = 2$ [4; 5; 7].

Якщо маємо на ланцюгу з краю позначку 4, то $ind\ \mathbf{G} = 2$ [4; 5; 7].

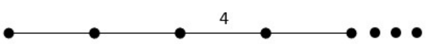
Якщо маємо на ланцюгу з краю позначку 5, то $ind\ \mathbf{G} = \sqrt{\sqrt{5}+2}$ [4; 5; 7].

Якщо маємо на ланцюгу з краю позначку 6, то $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ [5; 7].

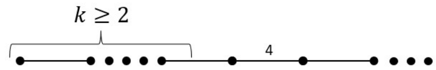
За твердженням 1 за зменшення мітки на ребрі індекс графа не збільшується, тому за збільшення мітки на ланцюгу (7 та більше) $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$

Якщо маємо позначку 4, посунуту на 1 ребро, то $ind\ \mathbf{G} = \sqrt{\sqrt{5}+2}$ [4; 5; 7].

Якщо маємо позначку 4, посунуту на 2 ребра, то $ind\ \mathbf{G} > \sqrt{\sqrt{5}+2}$ [5; 7].



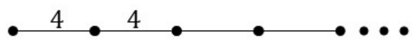
Якщо маємо позначку 4, посунуту на k ребер, то $ind\ \mathbf{G} < \frac{3}{\sqrt{2}}$ [7]. За твердженням 1 за видалення вершини індекс графа не збільшується, тому за збільшення кількості ребер, на які посунута позначка 4, індекс графа не зменшується, тому при $k \geqslant 2$ $\;ind\ \mathbf{G} > \sqrt{\sqrt{5}+2}$. Отже, $ind\ \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.



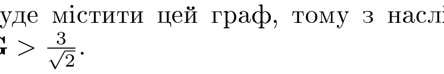
Якщо маємо позначку 5, посунуту на 1 ребро, то $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$ [5; 7]. За твердженням 1 за видалення вершини індекс графа не збільшується, тому за збільшення кількості ребер, на які посунута позначка 5, індекс графа не зменшується. Отже, при зсуву позначки 5 на k ребер, $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$. Індекси ланцюгів із позначкою 5 не належать до необхідного проміжку.

За твердженням 1 за зменшення мітки на ребрі індекс графа не збільшується, тому за збільшення мітки індекс графа не зменшується. Оскільки при зсуві 5 від краю $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$, тому для позначок, більших за 5, також буде виконуватись ця нерівність.

Якщо маємо дві позначки 4 поруч з краю, то $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$ [7].



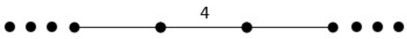
Якщо маємо дві позначки 4 на відстані k, одна з яких розташована з краю, то $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$ [5; 7]. Отже, на ланцюгу не може бути 2 позначки 4, одна з яких — з краю. Якщо посунути ці позначки на певну кількість ребер, то він буде містити цей граф, тому з наслідку 3 $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.



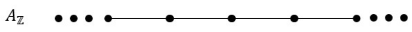
За твердженням 1 за зменшення мітки на ребрі індекс графа не збільшується, тому за збільшення мітки, індекс графа не зменшується. Оскільки за наявності двох позначок 4 $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$, тому за збільшення будь-якої позначки 4 або появі нових позначок, $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Отже, заданим умовам задовольняють лише графи з однією позначкою 4, посунутою на $k \geqslant 2$, індекси яких лежать у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ та ланцюг з міткою 6 з краю, індекс якого дорівнює $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

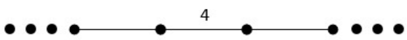
Теорема 5. *Нехай* $\mathbf{G}$ *— зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованим графом* $A_{\mathbb{Z}}$ *та його індекс належить проміжку* $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2};\frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, *тоді* $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ *та* $\mathbf{G}$ *— це граф:*



Доведення. Якщо на нескінченному в обидва боки ланцюзі немає позначок, то $ind\ \mathbf{G} = 2$ [4; 5; 7].



Якщо на нескінченному в обидва боки ланцюзі маємо позначку 4, то $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ [7].



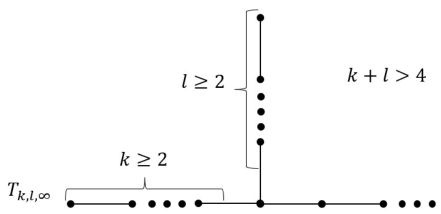
За твердженням 1 за зменшення мітки на ребрі індекс графа не збільшується, тому за збільшення мітки на нескінченному в обидві боки ланцюгу (5 та більше) $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Якщо нескінченний в обидва боки ланцюг містить дві або більше позначок, то він буде містити нескінченний ланцюг в одну сторону з цими позначками, тому з наслідку 3 $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

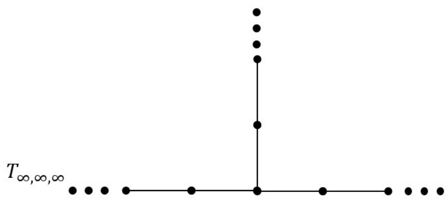
Отже, заданим умовам задовільняє лише нескінченний в обидва боки ланцюг, позначкою 4, індекс якого дорівнює $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

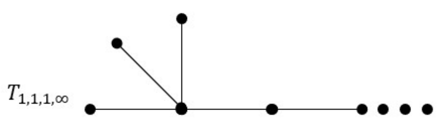
Теорема 6. *Нехай* $\mathbf{G}$ *— зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованими незваженими T-графами, то*

1. *Якщо* $ind\ \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, *то* G *— граф виду:*

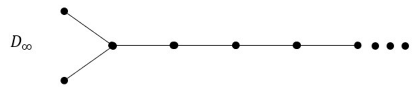


2. *Якщо* $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, *то* G *— граф виду:*

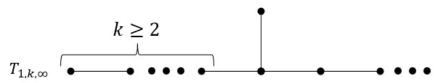




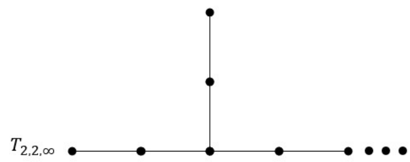
Доведення. Якщо маємо граф $T_{1,1,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} = 2$ [4; 5; 7].



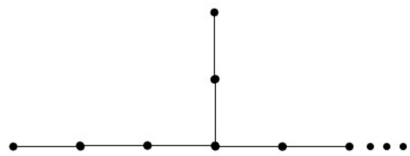
Якщо маємо граф $T_{1,k,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} < \sqrt{\sqrt{5}+2}$ [4; 5; 7]. Отже, індекс графа з висячою вершиною, інцидентною вершині степеня 3, буде меншим $\sqrt{\sqrt{5}+2}$.



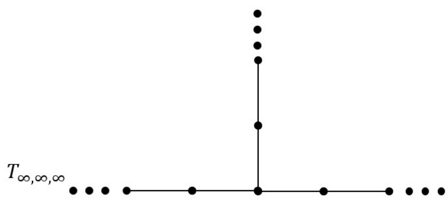
Якщо маємо граф $T_{2,2,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} = \sqrt{\sqrt{5}+2}$ [4; 5; 7].



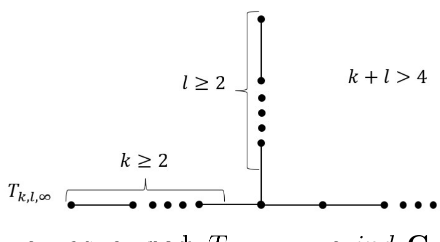
Якщо маємо граф $T_{2,3,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} > \sqrt{\sqrt{5}+2}$ [5; 7].



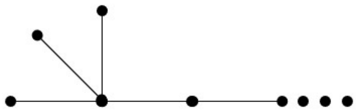
Якщо маємо граф $T_{\infty,\infty,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ [7].



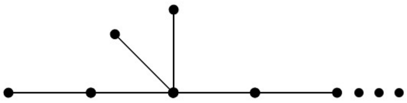
За твердженням 1 за видалення вершини індекс графа не збільшується, тому всі графи $T_{k,l,\infty}$ за $k \geqslant 2, l \geqslant 2$ та $k + l > 4$ мають індекс, який належить проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.



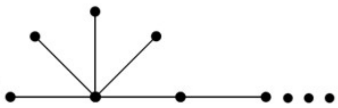
Якщо маємо граф $T_{1,1,1,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ [5; 7].

$T_{1,1,1,\infty}$


Якщо маємо граф $T_{1,1,2,\infty}$, то $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$ [7]. Якщо збільшити довжину будь-якого підланцюга, то граф буде містити $T_{1,1,2,\infty}$, тому з наслідку 3 $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.



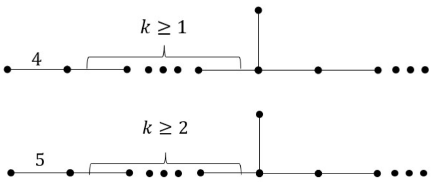
Якщо збільшити кількість ланцюгів, тобто збільшити степінь вершини, граф буде містити зірчастий граф $K_{1,4}$ з нескінченним ланцюгом, індекс якого більший за $\frac{3}{\sqrt{2}}$ [7], тому з наслідку 3 $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

$T_{1,1,1,1,\infty}$


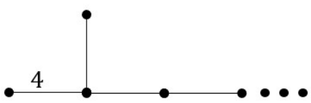
Отже, заданим умовам задовольняють лише графи $T_{k,l,\infty}$ за $k \geqslant 2, l \geqslant 2$ та $k + l \geqslant 4$, індекси яких лежать у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ та $T_{\infty,\infty,\infty}$ і $T_{1,1,1,\infty}$, індекси яких дорівнюють $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Теорема 7. *Нехай* $\mathbf{G}$ *— зліченний зв'язний граф Кокстера з підпорядкованими графами* $T_{1,k,\infty}$ *з позначкою з краю, тоді*

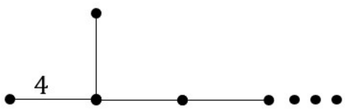
1. *Якщо* $ind\ \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, *то* $\mathbf{G}$ *— граф виду:*



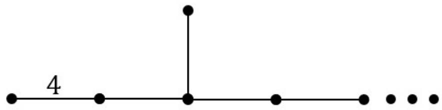
2. *Якщо* $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, *то* $\mathbf{G}$ *— граф:*



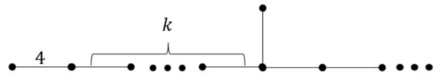
Доведення. Якщо маємо граф $T_{1,1,\infty}$ з позначкою 4, то $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ [7].



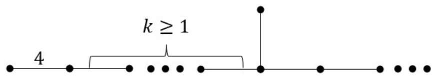
Якщо маємо граф $T_{1,2,\infty}$ з позначкою 4, то $ind\ \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ [7].



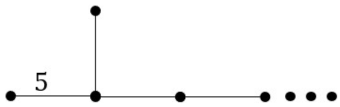
Якщо маємо граф $T_{1,k+1,\infty}$ з позначкою 4, то $ind\ \mathbf{G} > \sqrt{\sqrt{5}+2}$ [4; 5; 7].



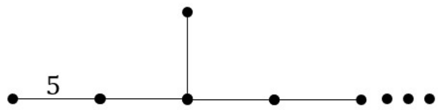
За твердженням 2 при підрозбитті внутрішнього ребра індекс графа не збільшується, тому всі графи $T_{1,k+1,\infty}$ з позначкою 4 за $k \geqslant 1$ мають індекс, який належить проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.



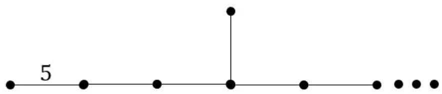
Якщо маємо граф $T_{1,1,\infty}$ з позначкою 5, то $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$ [7].



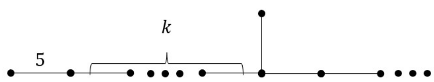
Якщо маємо граф $T_{1,2,\infty}$ з позначкою 5, то $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$ [7].



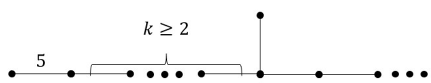
Якщо маємо граф $T_{1,3,\infty}$ з позначкою 5, то $ind\ \mathbf{G} \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ [7].



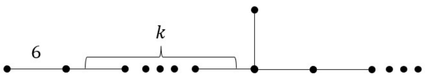
Якщо маємо граф $T_{1,k+1,\infty}$ з позначкою 5, то $ind\ \mathbf{G} > \sqrt{\sqrt{5}+2}$ [7].



За твердженням 2 при підрозбитті внутрішнього ребра індекс графа не збільшується, тому всі графи $T_{1,k+1,\infty}$ з позначкою 5 за $k \geqslant 2$ мають індекс, який належить проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.



Якщо маємо граф $T_{1,k+1,\infty}$ з позначкою 6, то $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$ [5; 7].



За твердженням 2 при підрозбитті внутрішнього ребра індекс графа не збільшується, тому всі графи $T_{1,k+1,\infty}$ з позначкою 6 мають індекс, який більше ніж $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

За твердженням 1 за зменшення мітки на ребрі індекс графа не збільшується, тому за збільшення мітки індекс графа не зменшується. Оскільки за наявності в графі $T_{1,k+1,\infty}$ мітки 6 $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$, тому за збільшення позначки (7 і більше) $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Отже, заданим умовам задовольняють лише графи $T_{1,k,\infty}$ з позначкою 4 за $k \geqslant 1$ і $T_{1,k,\infty}$ позначкою 5 за $k \geqslant 2$, індекси яких лежать у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, та $T_{1,1,\infty}$ з позначкою 4, індекс якого дорівнює $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

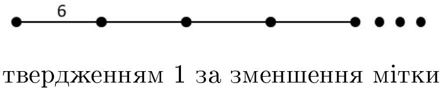
Також наведемо твердження з властивостями зліченного графа Кокстера, у яких індекс належить проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

Твердження 8. *Нехай* $\mathbf{G}$ *— зліченний зв'язний граф Кокстера та* $ind\ \mathbf{G} \in \in \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$, *тоді* $\mathbf{G}$ *має такі властивості:*

1. *Може мати позначки лише строго менші за 7;*
2. *Може мати позначки 5 або 6 лише на ребрах, інцидентних висячій вершині;*
3. *Може мати щонайбільше одну позначку (більшу за 3);*
4. *Може мати лише вершини степеня строго меншого за 5;*
5. *Серед ребер, інцидентних вершині степеня 4, може бути лише одне, що інцидентне не висячій вершині;*
6. *На ребрі, яке інцидентне вершині степеня 3, може бути лише позначка 4;*
7. *Якщо граф має вершину степеня 3, то може мати позначки лише строго менші за 6;*
8. *Не містить жодного цикла.*

Доведення. Доведення ґрунтується на основі наслідку 3. Якщо граф містить у собі підграф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$, то індекс цього графа також більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

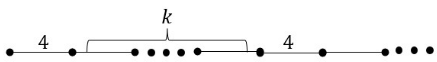
1. Нехай граф має позначку 7 або більше на ребрі. Коли маємо на ланцюгу позначку 6, то $ind\ \mathbf{G} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ [5; 7].

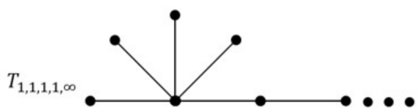
   За твердженням 1 за зменшення мітки на ребрі індекс графа не збільшується, тому за збільшення мітки (7 та більше) $ind\ \mathbf{G} > > \frac{3}{\sqrt{2}}$.
   Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Отже, граф може мати позначки лише строго менші за 7.
2. Нехай граф має позначку 5 або 6 на ребрі, не інцидентному висячій вершині.
   Для позначки 5 рахували [5; 7].

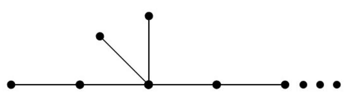
   Для позначки 6 за твердженням 1 за зменшення мітки на ребрі, індекс графа не збільшується, тому за збільшення мітки $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.
   Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Отже, граф може мати позначки 5 або 6 лише на ребрах, інцидентних висячій вершині.
3. Нехай граф має дві позначки 4.

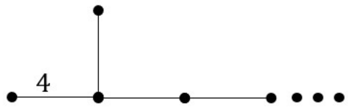
   Індекс такого графа більший за $\frac{3}{\sqrt{2}}$ [5; 7]. За твердженням 1 за зменшення мітки на ребрі індекс графа не збільшується, тому за збільшення мітки $ind\ \mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.
   Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Отже, граф може мати щонайбільше одну позначку (більше за 3).
4. Нехай граф має вершину степеня 5.

   Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$ [5; 7]. Отже, граф може мати вершини лише степеня, строго меншого за 5.
5. Нехай граф, у якому ребра, інцидентні вершині степеня 4, є інцидентними висячим вершинам, окрім одного.

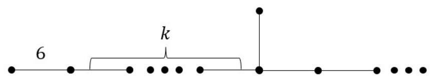
   Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$ [7]. Отже, у графі серед ребер, інцидентних вершині степеня 4, може бути лише одне, що інцидентне не висячій вершині.
6. Нехай граф має позначку, відмінну від 4 на ребрі, інцидентному вершині степеня 3. За позначки 4 індекс графа — $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ([7]).



За твердженням 1 за зменшення мітки на ребрі індекс графа не збільшується, тому за збільшення мітки $ind\,\mathbf{G} > \frac{3}{\sqrt{2}}$.

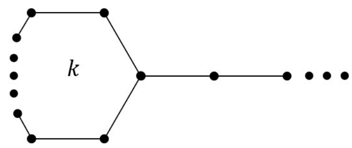
Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$. Отже, у графі на ребрі, яке інцидентне вершині степеня 3, може бути щонайбільше позначка 4.

7. Нехай граф має позначку 6 і має вершину степеня 3.



Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$ [5; 7]. Отже, якщо граф має вершину степеня 3, то може мати позначки лише строго менші за 6.

8. Нехай граф має цикл будь-якої довжини.



Тоді граф Кокстера містить граф, індекс якого більше за $\frac{3}{\sqrt{2}}$ [5; 7]. Отже, граф не може містити жодних циклів.

Одержані результати є продовженням досліджень у роботах [4; 5].

Список літератури

1. Mohar B., Woess W. A survey on spectra of infinite graphs. *Bull. London Math. Soc.* 1989. Vol. 21. Pp. 209–234.
2. Кириченко А. А., Самойленко Ю. С., Тимошкевич Л. М. Структура систем ортопроекторів, пов'язаних зі зліченними деревами Кокстера.*Український математичний журнал.* 2014. Том 66, № 9. С. 1185–1192.
3. Tymoshkevych L. M. On spectral theory of Coxeter graphs and its applications. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки.* 2014. Випуск № 1. С. 27–33.
4. Коротков А. С., Тимошкевич Л. М. Аналог теореми Сміта для зліченних графів Кокстера. *Доповіді Національної академії наук України.* 2013. № 12. С. 19–24.
5. Тимошкевич Л. М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і зліченних графів Кокстера. Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. Київ, 2015, 160 с.
6. Woo R., Neumaier A. On Graphs Whose Spectral Radius is Bounded by On Graphs Whose Spectral Radius is Bounded by $\frac{3}{2}\sqrt{2}$. *Graphs and Combinatorics.* 2007. Vol. 23, No. 6. Pp. 713–726.
7. Когут М. В. Класифікація зліченних графів Кокстера відносно індекса. Кваліфікаційна робота бакалавра. 2022.

References

1. B. Mohar and W. Woess, "A survey on spectra of infinite graphs", Bull. London Math. Soc., **21**, 209–234 (1989).
2. A. A. Kyrychenko, Yu. S. Samoilenko and L. M. Tymoshkevych, "Struktura system ortoproektoriv, poviazanykh zi zlichennymy derevamy Kokstera", Ukrainskyi matematychnyi zhurnal, **66** (9), 1185–1192 (2014).
3. L. M. Tymoshkevych, "On spectral theory of Coxeter graphs and its applications", Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки. **1**, 27–33 (2014).
4. A. S. Korotkov and L. M. Tymoshkevych, "Analoh teoremy Smita dlia zlichennykh hrafiv Kokstera", Dopovidi Natsionalnoi akademii nauk Ukrainy. **12**, 19–24 (2013).
5. L. M. Tymoshkevych, *Priami ta oberneni spektralni zadachi zvazhenykh skinchennykh hrafiv i zlichennykh hrafiv Kokstera*, Dysertatsiia kand. fiz.-mat. nauk, Kyiv. nats. un-t im. Tarasa Shevchenka, 2015.
6. R. Woo and A. Neumaier, "On Graphs Whose Spectral Radius is Bounded by $\frac{3}{2}\sqrt{2}$", Graphs and Combinatorics. **23** (6), 713–726 (2007).
7. M. V. Kohut, *Klasyfikatsiia zlichennykh hrafiv Kokstera vidnosno indeksa*, Kvalifikatsiina robota bakalavra, 2022.

L. Tymoshkevych, M. Kohut

CLASSIFICATION OF INFINITE COXETER GRAPHS RELATIVE TO THE VALUE OF THE INDEX IN THE INTERVAL $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$

The structure of infinite Coxeter graphs whose largest eigenvalue belongs to the interval from $\sqrt{\sqrt{5}+2}$ *to* $3\frac{3}{\sqrt{2}}$ *is investigated. In particular, such a graph is a tree, can have at most one label greater than 3* *on its edges and such label does not exceed 6, can have only vertices with degree strictly less than 5, and among edges which are incident with vertex with degree 4 can be only one that is not incident with leaf. A number of other properties are also given for infinite Coxeter graphs with largest eigenvalue in the specified interval.*

Keywords: infinite graph, Coxeter graph, largest eigenvalue.

Матеріал надійшов 21.10.2022