УДК 519.17

Пилипіва О. В., Тимошкевич Л. М.

DOI: 10.18523/2617-70805202226-32

ОБЕРНЕНІ СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВАЖЕНИХ ГРАФІВ

Роботу присвячено оберненим спектральним задачам для зважених графів. Наведено верхню оцінку спектрального відновлюючого числа для дерев та уніциклічних графів.

Ключові слова: спектр графа, власні числа, обернені спектральні задачі, реберно-зважені графи.

Вступ

Спектральна теорія графів — сучасна розвинена галузь математики з численними результатами та обширними можливостями застосувань (див. [1]). Різноманітні задачі відновлення для графів посідають значне місце в спектральній теорії графів (див. [2] – [4]). Роботу присвячено спектральним задачам для зважених графів, тобто графів з заданою додатною функцією на множині ребер. Досліджуються обернені задачі — відновлення ваги на множині ребер графа за спектральними даними графа та його підграфів. Зроблено огляд основних понять, тверджень спектральної теорії зважених графів та узагальнено формули Швенка (Теорема 3), які є зручним інструментом при розв'язуванні обернених спектральних задач. Для обраних класів графів з'ясовано, спектри якої кількості підграфів однозначно визначають ваги.

Прямі спектральні задачі для зважених графів

Основні означення теорії графів. Ми вважаємо, що читач знайомий з термінологією теорії графів, зокрема з термінами: вершини та ребра графа, суміжні вершини, інцидентні вершина та ребро, степінь вершини, порядок графа, ланцюг, зв'язний граф, компоненти зв'язності графа, цикл, дерево тощо. Детально ознайомитися з основами теорії графів читач може, наприклад, за книгою [5].

Надалі в цій статті під терміном **«граф»** ми розуміємо впорядковану пару множин (V,E), де V — множина вершин, що є непорожньою і скінченною, а E — довільна підмножина множини $V^{(2)}$, $V^{(2)}$ — множина всіх двохелементних пімножин (невпорядкованих пар різних елементів) множини V.

Введемо позначення, які надалі будемо використовувати у роботі:

– $E(G)$ — множина ребер E графа G.
– $V(G)$ — множина вершин V графа G.
– (u,v) — ребро, що з'єднує вершини u і v.

Означення 1. *Зваженим графом* $\mathbf{G}$ називають впорядковану пару (G,w), де G — граф, а $w : E \to (0,+\infty)$ — вагова функція, тобто відображення множини $E(G)$ у множину додатних дійсних чисел.

Вагу $w(e)$ ребра e будемо позначати w_e.

Основні означення з спектральної теорії зважених графів.

Означення 2. *Матриця суміжності* — це квадратна матриця:

$$A(\mathbf{G}) = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n}, \qquad (1)$$

де $n = |G|$ — кількість вершин у графі,

$a_{ij} = a_{ji}$ — елемент матриці, що дорівнює 0, якщо вершина i та j несуміжні, або w_{ij}, через w_{ij} позначаємо значення ваги ребра (i,j).

Таким чином, матриця суміжності є симетричною матрицею з нулями на головній діагоналі.

Означення 3. *Точки спектра* зваженого графа $\mathbf{G}$ — це власні значення його матриці суміжності.

Оскільки матриця суміжності симетрична, то її спектр буде дійсним.

Означення 4. *Спектр* графа $\sigma(\mathbf{G})$ — спектр його матриці суміжності.

Зауважимо, що спектр графа не залежить від нумерації вершин та є інваріантом графа.

Для характеристичного многочлена матриці суміжності зваженого графа будемо використовувати наступне позначення:

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|. \qquad (2)$$

Знаходження характеристичного многочлена та визначника матриці суміжності.

Означення 5. *Лінійний підграф графа G* — підграф, компонентами зв'язності якого є тільки ребра та цикли. Позначимо через H_k, де $k = |H_k|$, тобто дорівнює кількості вершин.

Означення 6. *Каркасний підграф графа G* — лінійний підграф, що містить усі вершини вихідного графа.

Введемо деякі позначення, які використовують у формулюванні теореми Харарі та Захса:
– $p(H_k)$ — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа H_k, що мають парну кількість вершин;
– $r(H_k)$ — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа H_k;
– $c(H_k)$ — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа H_k, що є циклами;
– $w(H_k)$ — вага H_k, яка є добутком усіх ваг його компонент зв'язності. Якщо компонента зв'язності містить лише одне ребро (i,j), то її вага буде дорівнювати w_{ij}^2, а якщо є циклом, то її вага дорівнює добутку значень w_{ij} за всіма ребрами (i,j).

Теорема 1 (Харарі [6]). *Визначник матриці суміжності довільного зваженого графа $\mathbf{G} = (G,w)$ можна порахувати за такою формулою:*

$$\det A(\mathbf{G}) = \sum_{\{H_n\}} (-1)^{p(H_n)} 2^{c(H_n)} w(H_n). \quad (3)$$

Теорема 2 (Захса [7]). *Якщо $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^{n-k} = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + ... + c_n$ — характеристичний многочлен графа $\mathbf{G} = (G,w)$, то*

(1) $c_1 = 0$;

(2) $c_2 = -\sum_{e \in E(\mathbf{G})} w(e)^2$

(3) $c_k = \sum_{\{H_k\}} (-1)^{r(H_k)} 2^{c(H_k)} w(H_k)$

для $k = 1,...,n$.

Також запишемо теорему, що узагальнює теорему Швенка, показує співвідношення між спектром зваженого графа $\mathbf{G}$ і спектром його підграфа, тобто між їх характеристичними многочленами.

Також порожній граф для зручності будемо позначати K_0, і його характеристичний многочлен $P_{\mathbf{K_0}}(\lambda) = 1$.

Наведемо узагальнення формули Швенка.

Теорема 3 ([8];[9]). *Нехай v — вершина зваженого графа G, через $C(v)$ позначимо множину циклів, що містять v. Тоді*

$$P_{\boldsymbol{G}}(\lambda) = \lambda P_{\boldsymbol{G}-v}(\lambda) - \sum_{u \ v} w_{uv}^2 P_{\boldsymbol{G}-v-u}(\lambda) - 2\sum_{Z \in C(v)} w(Z) P_{\boldsymbol{G}-V(Z)}(\lambda). \quad (4)$$

Наслідок 4 ([8];[9]). *(Розклад за висячою вершиною).*
Якщо вершина v — висяча вершина графа $\boldsymbol{G}$ і u та v — суміжні вершини, то

$$P_{\boldsymbol{G}}(\lambda) = \lambda P_{\boldsymbol{G}-v}(\lambda) - w_{uv}^2 P_{\boldsymbol{G}-v-u}(\lambda). \quad (5)$$

Обернені спектральні задачі для зважених графів

Почнемо з постановки задачі.

Розглянемо таку задачу відновлення для зважених графів: нехай нам відомий граф G, ми хочемо однозначно відновити вагову функцію w зваженого графа $\mathbf{G} = (G,w)$ за спектрами певних його підграфів.

Лема. *Відновлення ваги для кожного ребра зваженого графа $\boldsymbol{G}$ за спектрами його підграфів і відновлення за характеристичними многочленами цих підграфів є еквівалентними задачами.*

Доведення. Характеристичний многочлен $P_{\mathbf{G}}$ довільного зваженого графа $\mathbf{G}$ можна однозначно відновити за спектром і навпаки, бо корені многочлена, у якого старший коефіцієнт дорівнює одиниці, однозначно його відновлюють.

Нехай $\sigma(\mathbf{G}) = \{\lambda_1,\lambda_2, ...,\lambda_n\}$ — спектр зваженого графа $\mathbf{G}$, то

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i). \quad (6)$$

Відновлювальне спектральне число $Srn(G)$.

Означення 7. *Породжений, або індукований підграф графа G* — підграф, утворений підмножиною вершин графа G і усіма ребрами, що з'єднують ці вершини.

Означення 8. Підспектр графа G — спектр підграфа.

Означення 9. *Відновлювальне спектральне число $Srn(G)$* — мінімальна кількість спектрів індукованих підграфів, за якими однозначно відновлюються ваги ребер вихідного графа.

Верхня границя для довільного графа $\mathbf{G}$: $Srn(G)$ дорівнює $|E(G)|$, бо будь-який зважений граф можна відновити, знаючи спектри всіх підграфів, породжених парами суміжних вершин графа.
Тобто $Srn(G) \le |E(G)|$.

Для кожного графа $\mathbf{G}$ виникають дві задачі: навести приклад підспектрів, за якими можна здійснити відновлення, та знайти відновлювальне спектральне число.

Задача відновлення ваг для ланцюга. Для зваженого графа $\mathbf{A}_n = (A_n,w)$, який є ланцюгом, розглянемо поставлену задачу.

Пронумеруємо його вершини від 1 до n, тобто $V(A_n) = \{1,2,...,n\}$, і вершина k суміжна з вершинами $k-1$ і $k+1$: $\forall k \in \{2,...,n-1\}$. Вагу ребра, що з'єднує i та $i+1$ вершини $\forall i \in \{1,...,n-1\}$, позначимо a_i.
$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_n - \{k+1,...,n\}$, $P_{\mathbf{k}} \equiv P_{\mathbf{A}_k}$.

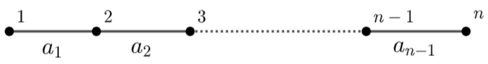

Рис. 1. $\mathbf{A}_n$

Розглянемо випадок, коли $n = 2$.
Для $\mathbf{A}_2$: $\sigma(\mathbf{A}_2) = \{-a_1,a_1\}$ і $P_{\mathbf{A_2}} = \lambda^2 - a_1^2$. Очевидно, що з такого спектра однозначно відновлюються ваги. Оскільки $a_1^2 = b$, де b — коефіцієнт многочлена, який відомий нам за умовою, то $a_1 = \sqrt{b}$, $a_1 > 0$.
Приклад 1. Для будь-якого $n \geq 3$ можна відновити зважений граф $\mathbf{A_n}$ за спектром всього графа $\sigma(\mathbf{A}_n)$ і підспектром $\sigma(\mathbf{A}_{n-1})$.
Доведення. За індукцією доведемо, що для відновлення ваг графа $\mathbf{A}_n, n \geq 3$ достатньо двох підспектрів: $\sigma(\mathbf{A}_n), \sigma(\mathbf{A}_{n-1})$.

База індукції: $n = 3$. Маємо за формулою Швенка $P_{\mathbf{3}}(\lambda) = xP_{\mathbf{2}}(\lambda) - a_2^2\lambda$, оскільки старший коефіцієнт $P_{\mathbf{2}}$ дорівнює 1, то за його коренями однозначно відновлюється і многочлен, отже однозначно знаходиться a_2, а знаючи спектр $\mathbf{A}_2$, ми можемо відновити і a_1.

Індукційний перехід: $n-1 \to n$. За Наслідком 4

$$P_{\mathbf{n}}(\lambda) = xP_{\mathbf{n-1}}(\lambda) - a_{n-1}^2 P_{\mathbf{n-2}}(\lambda),$$

прирівнюючи коефіцієнти при λ^{n-2} в обох частинах, знаходимо a_{n-1}, далі можемо виразити многочлен

$$P_{\mathbf{n-2}}(\lambda) = \frac{1}{{a_{n-1}}^2}(\lambda P_{\mathbf{n-1}}(\lambda) - P_{\mathbf{n}}(\lambda)).$$

Отже, нам відомі $P_{\mathbf{n-1}}$ та $P_{\mathbf{n-2}}$, за індукційним припущенням, ми можемо відновити решту ваг $a_1,...,a_{n-2}$. Легко зрозуміти, що за $n \geq 2$ одного спектра недостатньо, адже, щоб відновити всі ваги, обраний підграф має містити всі ребра, тобто бути самим A_n, але в цьому випадку симетричною заміною всіх ваг на ребрах відносно центру графа, тобто $w(k,k+1) \leftrightarrow w(n-k,n+1-k)$, одержимо граф з тим самим спектром, але іншими вагами в загальному випадку.

Задача відновлення ваг для графа–метелика. Для зваженого графа-метелика $\mathbf{G}$, зображеного на рис. 2, розглянемо поставлену задачу.

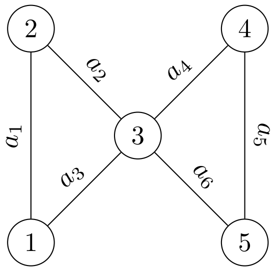

Рис. 2. $\mathbf{G}$ — граф-метелик

Приклад 2. Зважений граф-метелик можна відновити за такими чотирма підспектрами: $\sigma((4,5))$, $\sigma((2,3))$, $\sigma(\mathbf{G} - \{5\})$, $\sigma(\mathbf{G})$.
Доведення. Запишемо характеристичні многочлени для графів $\mathbf{G}$ і $\mathbf{G} - \{5\}$.

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda^5 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)\lambda^3 - \\ - 2\lambda^2(a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6) + \\ + (a_1^2a_4^2 + a_1^2a_5^2 + a_2^2a_5^2 + a_3^2a_5^2 + a_1^2a_6^2)\lambda + \\ + 2(a_1a_2a_3a_5^2 + a_4a_5a_6a_1^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{G}-\{\mathbf{5}\}}(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) - \\ - 2a_1a_2a_3\lambda + a_1^2a_4^2 \end{aligned}$$

Спектр графа-ребра (4;5) відновлює a_5. Оскільки нам відомо, чому дорівнює коефіцієнт $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$ зі спектра $\mathbf{G} - \{5\}$ і a_5, то з коефіцієнта характеристичного многочлена вихідного графа $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2$ однозначно відновлюємо a_6.

Зі спектра $\mathbf{G} - \{5\}$ відомо, чому дорівнює $a_1a_2a_3$. З коефіцієнта $(a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6)$ спектра $\mathbf{G}$ можемо знайти значення $a_4a_5a_6$. Оскільки нам відомо a_5, $a_1a_2a_3$ і $a_4a_5a_6$, з $(a_1a_2a_3a_5^2 + a_4a_5a_6a_1^2)$ однозначно відновлюємо a_1.

Оскільки нам відомо a_1, з коефіцієнта $a_1^2a_4^2$ однозначно відновлюємо a_4. Для відновлення ваг a_2,a_3 треба знати спектр графа-ребра (2;3) або (1;3). Тобто такий набір підспектрів однозначно відновлює ваги вихідного графа-метелика.

Верхня оцінка відновлювального спектрального числа для дерев.
Теорема 5. *Нехай F — довільний зважений граф, $z \in V(F)$ та H — дерево з коренем y. Граф Γ — об'єднання графів F, H та ребра, що з'єднує вершини z та y. Тоді за спектрами $\mathbf{\Gamma}$ та всіх підграфів виду $\mathbf{\Gamma} - \mathbf{v}$, де v пробігає $CV(H)$ — множина висячих вершин, відмінних від кореня, можна відновити ваги на*

ребрах графа $\mathbf{H}$*, вагу на ребрі* (z,y)*, а також* $P_{\mathbf{F}}, P_{\mathbf{F}-\{z\}}$.

Доведення. Будемо доводити методом математичної індукції за кількістю вершин n графа H.

База індукції: $n = 1$. В цьому випадку граф H складається лише з однієї вершини y. Скористаємося розкладом за висячою вершиною y для графа $\mathbf{\Gamma}$ (див. Наслідок 4):

$$P_{\mathbf{\Gamma}} = \lambda P_{\mathbf{\Gamma}-y} - w_{zy}^2 P_{\mathbf{\Gamma}-y-z}.$$

Оскільки $P_{\mathbf{\Gamma}}, P_{\mathbf{\Gamma}-y} = P_{\mathbf{F}}$ – відомі, то можна знайти і w_{zy}, $P_{\mathbf{\Gamma}-y-z} = P_{\mathbf{F}-z}$.

Індукційний перехід: $m \le n-1 \to n$.

Розглянемо граф H з n вершинами. Позначимо через $y_1, y_2, ..., y_k$ – вершини графа H, які суміжні з вершиною y. Через H_1, H_2,..., H_k позначимо компоненти зв'язності графа $H-y$, які містять відповідно вершини $y_1, y_2, ..., y_k$ (з коренями $y_1, y_2, ..., y_k$.)

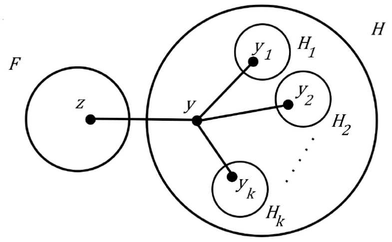

Рис. 3

Зауважимо, що кількість вершин у графах $H_1, H_2, ..., H_k$ строго менша за n та $CV(H) = CV(H_1) \bigcup CV(H_2) \bigcup ... \bigcup CV(H_k)$.

Для кожного $l = 1,...,k$ позначимо через $F_l = \Gamma - H_l, \Gamma_l = F_l \bigcup H_l \bigcup (z,y)$ та застосуємо припущення індукції для k трійок H_l, F_l, Γ_l, $l = 1,...,k$ (для графа F_k береться вершина y), за яким ми можемо відновити ваги на ребрах всіх графів $H_1, H_2, ..., H_k$ (а отже, $P_{\mathbf{H}_1}, ..., P_{\mathbf{H}_k}$), ваги на ребрах $(y_1,y), (y_2,y), ..., (y_k,y)$, а також $P_{\mathbf{F}_l}$, $P_{\mathbf{F}_l-y}$ для всіх $l = 1,...,k$.

Зауважимо, що $P_{\mathbf{F}_l-y} = P_{\mathbf{F}} P_{\mathbf{H}_1} \cdot ... \cdot P_{\mathbf{H}_{l-1}} P_{\mathbf{H}_{l+1}} \cdot ... \cdot P_{\mathbf{H}_k}$ (в добуток не включався $P_{\mathbf{H}_l}$), а оскільки $P_{\mathbf{F}_l-y}$, $P_{\mathbf{H}_1}, ..., P_{\mathbf{H}_k}$ – відомі, то $P_{\mathbf{F}}$ також можна знайти.

Далі скористаємося Теоремою 3 для графа Γ та вершини y, що має $k+1$ суміжну вершину: $z, y_1, y_2, ..., y_k$.

$$P_{\mathbf{\Gamma}} = \lambda P_{\mathbf{\Gamma}-y} - w_{zy}^2 P_{\mathbf{\Gamma}-y-z} - \\ -w_{y_1 y}^2 P_{\mathbf{\Gamma}-y-y_1} - ... - w_{y_k y}^2 P_{\mathbf{\Gamma}-y-y_k}$$

.

Зауважимо, що

$$P_{\mathbf{\Gamma}-y} = P_{\mathbf{F}} P_{\mathbf{H}_1} \cdot ... \cdot P_{\mathbf{H}_k}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-y-z} = P_{\mathbf{F}-z} P_{\mathbf{H}_1} \cdot ... \cdot P_{\mathbf{H}_k}$$

$$P_{\mathbf{\Gamma}-y-y_l} = P_{\mathbf{F}_l-y} P_{\mathbf{H}_l-y_l}$$

Отже, з попередніх міркувань випливає, що можна знайти і w_{zy}, $P_{\mathbf{F}-z}$. Таким чином, ми повністю довели індукційний перехід.

Позначимо через $cv(G)$ кількість висячих вершин графа G.

Теорема 6. *(оцінка Srn для дерев) Нехай* $\mathbf{G} = (G,w)$ *і граф* G *— дерево, тоді* $Srn(G) \le cv(G)$*, та для відновлення вагової функції* w *достатньо знати спектри таких підграфів:* $\mathbf{G}$ *та всіх підграфів вигляду* $\mathbf{G} - v$*, де* v *пробігає множину* $CV(G)$.

Доведення. Спираючись на попередню теорему 5, щоб довести цю теорему для зваженого графа $\mathbf{G}$, достатньо взяти як граф F граф, що складається з однієї точки A_1, та як H граф G.

Для серії графів ця оцінка є точною, як показує наступне твердження. У ньому вжито позначення $\mathbf{K}_{1,n}$ для графа-зірочки на $n+1$ вершині.

Теорема 7 ([8];[9]). $Srn(K_{1,n}) = n$.

Верхня оцінка відновлювального спектрального числа для уніциклічного графа. Розглянемо перший випадок, $F = C_n$, і граф $\mathbf{G}$ — уніциклічний, зображений на рис. 4.

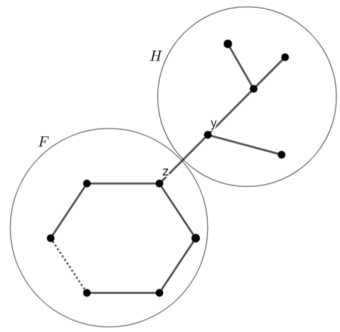

Рис. 4

За Теоремою 5, ми відновлюємо ваги на ребрах графа H, вагу на ребрі (z,y), а також $P_{\mathbf{F}}$, $P_{\mathbf{F}-z}$ за спектрами $\mathbf{G}$ та всіх підграфів виду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає $CV(H)$. Нам також необхідно відновити ваги на ребрах циклу. Оскільки ми знаємо характеристичний многочлен ланцюга $P_{\mathbf{F}-z}$, то, знаючи характеристичний многочлен $P_{\mathbf{F}-z-u}$, де u — суміжна вершина з z, ми відновлюємо ваги усіх ребер, окрім тих, які є інцидентні з вершиною z. Отже, нам ще треба знати вагу одного з ребра, яке інцидентне з вершиною z, і ми зможемо відновити усі ваги графа $\mathbf{G}$. Тобто для такого графа $\mathbf{G}$ (див. рис. 4) $Srn(G) \le cv(G) + 3$.

Розглянемо другий випадок, коли ми маємо декілька дерев H_k, що приєднані через реброміст до циклу і граф $\mathbf{G}$ — уніциклічний, зображений на рис. 5.

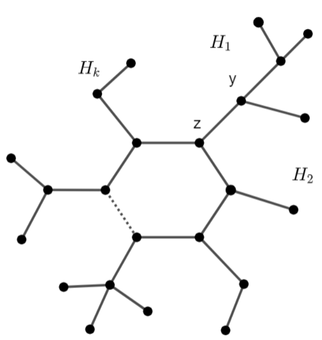

Рис. 5

Застосуємо Теорему 5 k разів, тобто для кожного $F = G - H_i$ і дерева H_i, $i \in \{1,...,k\}$. Ми відновлюємо ваги на ребрах графів $\mathbf{H}_1,...,\mathbf{H}_k$, ваги на ребрах (z_i,y_i), а також $P_{\mathbf{F}},P_{\mathbf{F}-z_i}$ за спектрами $\mathbf{G}$ та всіх підграфів виду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає $CV(H) = CV(H_1) \cup ... \cup CV(H_k)$. Нам також необхідно відновити ваги на ребрах циклу, які ми точно можемо відновити, знаючи ще 2 підспектри, що розписано у попередньому пункті. Тобто для такого графа $\mathbf{G}$ (див. рис. 5) $Srn(G) \leq cv(G) + 3$.

Розглянемо також третій випадок, коли $F = C_n$, ми маємо декілька дерев H_k зі спільною вершиною z, яка належить циклу, і граф $\mathbf{G}$ — уніциклічний, зображений на рис. 6.

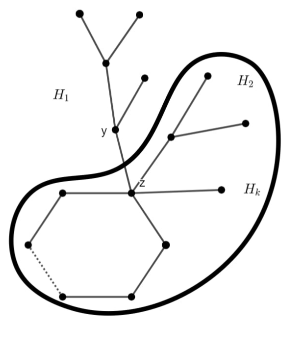

Рис. 6

Як і у попередньому випадку для кожного $F = G - H_i$ і дерева H_i, $i \in \{1,...,k\}$, застосуємо теорему 4 і відновимо ваги на ребрах графів $\mathbf{H}_1,...,\mathbf{H}_k$, ваги на ребрах (z,y_i), а також $P_{\mathbf{F}},P_{\mathbf{F}-z}$ за спектрами $\mathbf{G}$ та всіх підграфів виду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає $CV(H) = CV(H_1) \cup ... \cup CV(H_k)$. Нам також необхідно відновити ваги на ребрах циклу, які ми точно можемо відновити за двома підспектрами, що розписано у першому пункті. Тобто для такого графа $\mathbf{G}$ (див. рис. 6) $Srn(G) \leq cv(G) + 3$.

Об'єднавши результати, одержані при розгляді другого та третього випадку, одержуємо наступну теорему для загального випадку.

Теорема 8. *Для довільного уніциклічного графа $\mathbf{G}$: $Srn(G) \leq cv(G) + 3$.*

Верхня оцінка відновлювального спектрального числа для графа кактуса–ланцюжка. Для довільного зваженого графа кактуса-ланцюжка $\mathbf{G}$, зображеного на рис. 7, розглянемо поставлену задачу.

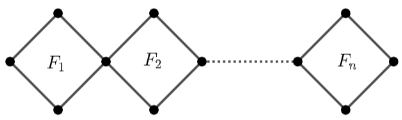

Рис. 7. $\mathbf{G}$ — граф кактус-ланцюг

Нехай елементами ланцюга є графи $F_1,...,F_n$ і для будь-якого $i \in \{1,...,n\}$:
F_i — цикл C_m, де $m \geq 4$, $\forall j \in \{1,...,n-1\}$. Пронумеруємо вершини, що належать множині вершин F_j і множині вершин F_{j+1}, тобто $V(F_j) \cap V(F_{j+1}) = j$. Також вершини, у яких степінь дорівнює чотирьом, не є суміжними.

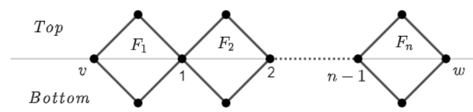

Рис. 8

Розташуємо вершини $1,...,n$ і вершини v, w горизонтально у лінію,
де $v \in V(F_1)$ і відстань від v до вершини 1 дорівнює двом, $w \in V(F_n)$ і відстань від w до вершини n дорівнює двом. Розіб'ємо $F_1,...,F_n$ на верх і низ (див. рис. 8). Будемо мати такі дві множини $VT(G)$ і $VB(G)$, де $VT(G)$ — множина вершин, що розташовані у верхній області, тобто зверху лінії, і $VB(G)$ — множина вершин, що розташовані в нижній області, тобто знизу лінії.

Видалимо з графа $\mathbf{G}$ вершини з множини $VT(G)$ і отримаємо підграф — звичайний ланцюг A_B, що розташований у нижній області, та видалимо з графа $\mathbf{G}$ вершини з множини $VB(G)$ і отримаємо підграф — звичайний ланцюг A_T, що розташований у верхній області.

Тоді за твердженням 1 ми можемо відновити ваги ребер підграфів $\mathbf{A}_B$ і $\mathbf{A}_T$, знаючи також підспектри: $\sigma(\mathbf{A}_B - v)$ і $\sigma(\mathbf{A}_T - v)$, де v — висяча вершина ланцюга A_B і A_T.

Отже, такий граф кактус-ланцюжок (див. рис. 7), можна відновити за чотирма підспектрами: $\sigma(\mathbf{A}_B)$, $\sigma(\mathbf{A}_B - v)$, $\sigma(\mathbf{A}_T)$, $\sigma(\mathbf{A}_T - v)$, і $Srn(G) \leq 4$.

Загальні обернені спектральні задачі для зважених графів

Загальне відновлювальне спектральне число $srn(G)$.

Означення 10. *Загальне відновлювальне спектральне число* $srn(G)$ — мінімальна кількість спектрів підграфів, що були утворені видаленням ребер, за якими однозначно відновлюються ваги ребер вихідного графа.

Верхня оцінка загального відновлювального спектрального числа для графа-кактуса. Для довільного зваженого графа-кактуса **G**, зображеного на рис. 9, і $G \neq C_n$ розглянемо поставлену задачу.

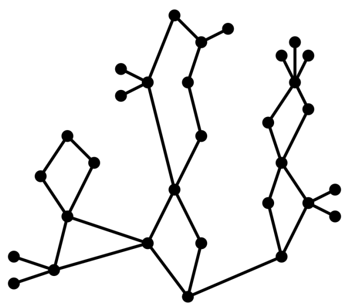

Рис. 9. G — граф-кактус

Нехай c — це кількість циклів у графі-кактусі. Видалимо c ребер, тобто одне ребро з кожного циклу, що інцидентний вершині, у якої степінь більше або дорівнює трьом. Отримаємо дерево H і застосуємо теорему 4. Тобто за $cv(H)$ підспектрами, де $cv(H)$ — кількість висячих вершин, можна відновити ваги на дереві H. І $cv(H)$ дорівнює $cv(G) + c$, оскільки з видаленням ребра з одного циклу кількість висячих вершин збільшується на 1, а ми видаляємо ребро c разів. Ще треба c підспектрів, щоб відновити c ребер, які ми видалили.

Отже, $srn(G) \leq cv(G) + 2c$.

Висновки

Наведені вище результати дають явні набори підграфів, за спектрами яких відновлюються всі ваги у випадку дерев, уніциклічних графів та деяких інших спеціальних класів графів. Узагальнена формула Швенка (Теорема 3) є основним інструментом при розв'язанні обернених спектральних задач, і підхід у цій роботі може бути застосованим для дослідження обернених спектральних задачах для інших класів зважених графів.

Список літератури

1. Brouwer A. E., Haemers W. H. Spectra of Graphs. New York : Springer, 2011. P. 250.
2. Cvetkovic D. M. The reconstruction problem for characteristic polynomials of graphs. *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.* 1975. Pp. 45–48.
3. Hogben L. Spectral graph theory and the inverse eigen value problem of a graph.*Chamchuri Journal of Mathematics.* 2009. Vol. 1. Pp. 51–72.
4. van Dam E. R., Haemers W. H. Which graphs are determined by their spectrum? *Linear Algebra and its Applications.* 2003. Vol. 373. Pp. 241–272.
5. Bondy J. A., Murty U. S. R. Graph Theory with Applications. New York : American Elsevier Publishing Company, 1976.
6. Harary F. The determinant of the adjacency matrix of a graph. *SIAM Rev.* 1962. Vol. 4, no. 3. Pp. 202–210.
7. Sachs H. Beziehungen zwischen den in einem graphen enthaltenen kreisenund seinem charakteristischen polynom. *Publ. Math. Debrecen.* 1964. Bd. 11. S. 119–134.
8. Тимошкевич Л. М. Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* 2013. Т. 14. С. 165–175.
9. Тимошкевич Л. М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і зліченних графів Кокстераї. Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. Київ, 2015. 160 с.

References

1. A. E. Brouwer and W. H. Haemers, *Spectra of Graphs* (New York: Springer, 2011), p. 250.
2. D. M. Cvetkovic, "The reconstruction problem for characteristic polynomials of graphs.", *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.* 45–48 (1975).
3. L. Hogben, "Spectral graph theory and the inverse eigen value problem of a graph", Chamchuri Journal of Mathematics. 1, 51–72 (2009).
4. E. R. van Dam and W. H. Haemers, "Which graphs are determined by their spectrum?", Linear Algebra and its Applications. **373**, 241–272 (2003).
5. J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications* (New York : American Elsevier Publishing Company, 1976).
6. F. Harary, "The determinant of the adjacency matrix of a graph", SIAM Rev. **4** (3), 202–210 (1962).
7. H. Sachs, "Beziehungen zwischen den in einem graphen enthaltenen kreisenund seinem charakteristischen polynom", Publ. Math. Debrecen. **11**, 119–134 (1964).
8. L. M. Tymoshkevych, "Oberneni spektralni zadachi na reberno-zvazhenykh hrafakh", Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Drahomanova. Seriia 1. Fizyko-matematychni nauky. **14**, 165–175 (2013).
9. L. M. Tymoshkevych, *Priami ta oberneni spektralni zadachi zvazhenykh skinchennykh hrafiv i zlichennykh hrafiv Koksterai*, Dys. kand. fyz.-mat. nauk, Kyiv, 2015.

O. Pylypiva, L. Tymoshkevych

INVERSE SPECTRAL PROBLEMS FOR WEIGHTED GRAPHS

The paper is devoted to inverse spectral problems for weighted graphs. We give the sharp upper bound for spectral reconstruction number of trees and unicyclic graphs.

Keywords: spectra of graphs, eigenvalues, inverse spectral problem, edge-weighted graphs.

Матеріал надійшов 25.09.2022