

ВІДНОВЛЮЮЧЕ СПЕКТРАЛЬНЕ ЧИСЛО ГРАФА K_4

Статтю присвячено дослідженню обернених спектральних задач для зважених графів. Розглянуто задачу щодо відновлення ваг на множині ребер графа за спектрами його індукованих підграфів.

Завдяки широкому колу застосувань, обернені спектральні задачі активно вивчають для різних класів матриць: зазвичай вони зводяться до відновлення матриці (або її частини) за спектром самої матриці чи її підматриць. Наша задача стосується класу нерозкладних симетричних матриць з невід'ємними елементами та нулями на головній діагоналі — матриць суміжності зв'язних зважених графів.

Ключовим поняттям цієї роботи є відновлююче спектральне число графа $Srn(G)$ — мінімальна кількість спектрів індукованих підграфів, необхідних для однозначного відновлення всіх ваг ребер графа G . Головним результатом дослідження є знаходження точного значення $Srn(K_4)$ для повного графа на чотирьох вершинах. Одержані результати та використані у роботі методи можуть бути застосовані в подальших дослідженнях, зокрема для визначення точних значень відновлюючого спектрального числа інших графів.

Ключові слова: спектр графа, власні числа, обернені спектральні задачі, зважений граф.

Вступ

Спектральна теорія графів є сучасним напрямом математики (див. [1]), який активно розвивається завдяки широким можливостям практичного застосування в різних областях, таких як хімія, фізика, біологія, комп'ютерні науки, економіка, соціальні науки та ін. (див. [2]). Наприклад, її використовують у машинному навчанні для покращення роботи згорткових нейронних мереж (див. [3]), у соціології — для пошуку соціальних сенсорів в епідеміологічних мережах (див. [4]).

Важливою складовою спектральної теорії графів є різноманітні задачі відновлення графів, що передбачають визначення структури графа або його характеристик (наприклад, ваг) на основі спектральних даних (див. [5–8]). З оглядом обернених спектральних задач можна ознайомитися за роботою [7].

Дослідження зосереджено на оберненій спектральній задачі для зважених графів, тобто графів, на множині ребер яких визначена додатна функція. У статті [10] вперше було введено поняття $Srn(G)$ — відновлюючого спектрального числа графа G , та знайдено його точні значення для деяких класів графів, зокрема доведено, що для графа-ланцюга $Srn(A_n) = 2$ за $n \geq 3$ та для графа-зірки $Srn(K_{1,n}) = n$.

У роботах [11; 12] наведено верхню оцінку Srn для дерев та уніциклічних графів через кількість висячих вершин. Проте знаходження точного значення $Srn(G)$ навіть для графів G

невеликого порядку залишається досить складною задачею через її нелінійний характер та високу чутливість цього параметра до структури графа.

Метою цієї роботи є детальне дослідження оберненої спектральної задачі для повного графа K_4 та знаходження точного значення числа $Srn(K_4)$ (Теорема 2).

Основні означення та твердження

У цій статті під терміном *граф* розуміємо впорядковану пару $G = (V, E)$, в якій V (множина вершин) — деяка непорожня множина, E (множина ребер) — довільна підмножина множини усіх неупорядкованих пар різних елементів з V .

Будемо використовувати такі позначення: $E(G)$ — множина ребер графа G , $V(G)$ — множина вершин графа G , (u, v) — ребро, що з'єднує вершини u і v . Кількість вершин графа називають його порядком. У цій статті розглядаємо лише графи скінченного порядку.

Означення 1. *Зваженим графом $\mathbf{G}$* називають впорядковану пару (G, w) , де G — граф, а $w : E \rightarrow (0, +\infty)$ — вагова функція, яка ставить у відповідність кожному ребру e додатне число $w(e)$.

Зважений граф $\mathbf{G}$ зручно зображати за допомогою діаграми графа G , приписуючи над кожним ребром e його вагу $w(e)$.

Надалі часто будемо опускати слово «зваже-

ний», якщо з контексту та позначень зрозуміло, що мова йде саме про зважений граф.

Із кожним графом $\mathbf{G} = (G, w)$ та нумерацією його вершин натуральними числами від 1 до n , де n — порядок графа, пов'язують *матрицю суміжності* $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, в якій елемент a_{ij} i -го рядка та j -го стовпця дорівнює w_{ij} , якщо вершини з номерами i та j є суміжними (через w_{ij} позначаємо значення ваги ребра (i, j)), і дорівнює 0 в іншому випадку.

Означення 2. *Спектром графа $\mathbf{G}$* називають мультимножину власних значень його матриці суміжності. Позначають $\sigma(\mathbf{G})$.

Оскільки матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ симетрична, то спектр графа містить лише дійсні числа.

Зауважимо, що *спектр зваженого графа не залежить від способу нумерації вершин та є його інваріантом*.

Позначимо *характеристичний многочлен графа $\mathbf{G}$* через $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|$.

Якщо $\sigma(\mathbf{G}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ — спектр зваженого графа $\mathbf{G}$, тоді $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$.

Розглянемо необхідні для формулювання узагальненої теореми Захса означення та позначення (див. [9; 11]).

Лінійний підграф графа G є підграфом, компонентами зв'язності якого є лише пари суміжних вершин (з ребром, що їх з'єднує) та прості цикли. Позначимо його як H_k , де k — це кількість вершин у цьому підграфі. Під вагою компоненти зв'язності, що є парєю суміжних вершин $\{i, j\}$, будемо мати на увазі w_{ij}^2 , а під вагою компоненти зв'язності, що є простим циклом, — добуток значень w_{ij} за усіма ребрами циклу (i, j) .

Введемо позначення: $r(H_k)$ — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа H_k ; $c(H_k)$ — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа H_k , що є циклами; $w(H_k)$ — вага H_k , яка є добутком усіх ваг його компонент зв'язності.

Теорема 1. *(узагальнена теорема Захса)*

Якщо $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^{n-k} = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_n$, — *характеристичний многочлен графа $\mathbf{G} = (G, w)$* , то

$$(1) \ c_1 = 0;$$

$$(2) \ c_2 = - \sum_{e \in E(G)} w(e)^2$$

$$(3) \ c_k = \sum_{\{H_k\}} (-1)^{r(H_k)} 2^{c(H_k)} w(H_k)$$

для $k = 1, \dots, n$, (сума береться по всіх підграфах H_k графа G).

Нагадаємо, що індукований підграф графа G — підграф, утворений підмножиною вершин

графу G разом з усіма ребрами G , які сполучають ці вершини.

Означення 3. Зважений граф $\mathbf{G}_1 = (G_1, w_1)$ називають *індукованим підграфом* зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$, якщо G_1 — індукований підграф G , і для довільного ребра e графа G_1 має місце рівність $w_1(e) = w(e)$.

Розглянемо таку *обернену спектральну задачу* для зваженого графа: нехай нам відомий граф G , і ми хочемо однозначно відновити вагову функцію w зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ за спектрами певних його індукованих підграфів. Тобто потрібно, щоби за значеннями спектрів вибраних підграфів ваги на ребрах графа G визначалися однозначно для будь-якої вагової функції w . Спектр індукованого підграфа будемо називати *підспектром*.

Зауважимо, що задача відновлення ваг за спектрами підграфів еквівалентна задачі відновлення за характеристичними многочленами цих підграфів, оскільки за спектром зваженого графа однозначно відновлюється його характеристичний многочлен та навпаки.

Означення 4. *Відновлююче спектральне число $Srn(G)$* — мінімальна кількість індукованих підграфів G таких, що за спектрами відповідних зважених індукованих підграфів завжди однозначно відновлюється вагова функція зваженого графа $\mathbf{G}$.

Зауваження. Термін *відновлююче спектральне число* використовують відповідно до попередніх публікацій (див. [10–12]), у яких було введено це поняття. З погляду сучасної мовної норми, коректнішою формою є *відновлювальне спектральне число*. Проте задля збереження термінологічної послідовності ми залишаємо усталену назву.

Оскільки вагову функцію будь-якого зваженого графа можна однозначно відновити за спектрами всіх підграфів, породжених парами суміжних вершин, то одержуємо таку верхню оцінку для відновлюючого спектрального числа:

$$Srn(G) \leq |E(G)|.$$

Рівність у цій оцінці досягається, зокрема, для графа-зірки $K_{1,n}$, оскільки в роботі [10] доведено, що $Srn(K_{1,n}) = n$, що відповідає кількості ребер у графі.

Задача відновлення ваг для повного графа K_4

Дослідимо обернену спектральну задачу для K_4 . Для зручності як множину вершин оберемо

множину $\{1, 2, 3, 4\}$ та позначимо ваги на його ребрах через $a_1, a_2, \dots, a_6$ згідно з рис. 1.

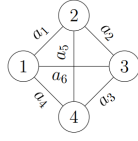


Рис. 1. Зважений граф K_4

З нерівності, наведеної вище, випливає, що шести підспектрів достатньо для відновлення ваг на усіх ребрах. Обґрунтуємо детальніше: для кожного індукованого підграфа K_4 , порожденного двома вершинами, характеристичний поліном має вигляд $P(\lambda) = \lambda^2 - a_i^2$, тому за шістьма підспектрами можна відновити усі ваги $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$.

Постає природне запитання: чи можна відновити ваги графа K_4 за п'ятьма підспектрами?

Далі ми розглянемо всі можливі набори підспектрів (з точністю до перенумерації вершин графа K_4) та покажемо, що п'яти підспектрів недостатньо (а отже, і меншої кількості).

Теорема 2. $Srn(K_4) = 6$.

Доведення. Наведемо всі можливі структури наборів, що складаються з п'яти індукованих підграфів, з точністю до ізоморфізму вибраних підграфів. C_3 позначає цикл довжини 3, а A_2 — ланцюг довжини 1. Число, яке стоїть перед позначенням графа, вказує на кількість підграфів цього виду у наборі.

Маємо такі типи наборів:

1. $K_4, 4C_3$;
2. $K_4, 3C_3, A_2$;
3. $K_4, 2C_3, 2A_2$;
4. $K_4, C_3, 3A_2$;
5. $K_4, 4A_2$;
6. $4C_3, A_2$;
7. $3C_3, 2A_2$;
8. $2C_3, 3A_2$;
9. $C_3, 4A_2$;
10. $5A_2$.

Розглянемо окремо кожен тип набору та наведемо приклади двох різних зважених графів K_4 (інакше кажучи, графів K_4 з різними ваговими функціями, заданими на множині його ребер), для яких спектри відповідних вибраних індукованих підграфів є рівними. Таким чином, ми доведемо, що п'яти підспектрів недостатньо для відновлення ваг на ребрах зваженого графа K_4 .

1. $K_4, 4C_3$. Легко переконатися, що характеристичні поліноми усіх циклів довжини три, що є підграфами графів K_4 , наведених на рис.2, рівні та мають такий вигляд:

$$P_{C_3}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda(a^2 + b^2 + c^2) - 2abc.$$

Також характеристичні поліноми графів K_4 з рис.2 рівні, оскільки ці графи переходять один в одного при перестановці вершин 1 та 3, а як відомо, спектр графа є його інваріантом і не залежить від нумерації його вершин.



Рис. 2. Графи K_4 з різними ваговими функціями на ребрах

2. $K_4, 3C_3, A_2$. Без обмеження загальності, можемо вибрати цикли на таких множинах вершин: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{3, 4, 6\}$. Щодо ланцюга A_2 (далі для зручності будемо називати його ребром), то існують два принципово різні варіанти вибору.

Розглянемо *перший випадок*, коли ребро належить двом з обраних циклів. Наприклад, розглянемо вибір ребра з вагою a_6 (інші варіанти розглядаються аналогічно).

Для кращого розуміння методу знаходження прикладів графів K_4 з різними ваговими функціями, спектри відповідних вибраних індукованих підграфів яких є рівними, розглянемо детальніше цей випадок.

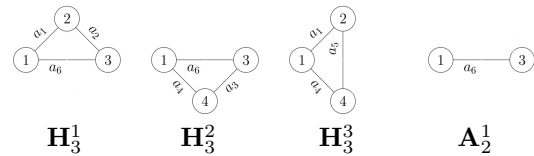


Рис. 3. набір вибраних індукованих власних підграфів

Запишемо за узагальненою теоремою Захса (Теорема 1) характеристичні многочлени графа K_4 (рис. 1) та його вибраних власних підграфів, зображених на рис. 3:

$$\begin{aligned} P_{A_2^1}(\lambda) &= \lambda^2 - a_6^2 \\ P_{H_1^3}(\lambda) &= \lambda^3 - (a_1^2 + a_2^2 + a_6^2)\lambda - 2a_1a_2a_6 \\ P_{H_2^3}(\lambda) &= \lambda^3 - (a_3^2 + a_4^2 + a_6^2)\lambda - 2a_3a_4a_6 \\ P_{H_3^3}(\lambda) &= \lambda^3 - (a_1^2 + a_4^2 + a_5^2)\lambda - 2a_1a_4a_5 \\ P_{K_4}(\lambda) &= \lambda^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)\lambda^2 - 2(a_1a_4a_5 + a_1a_2a_6 + a_2a_3a_5 + a_3a_4a_6)\lambda + \\ &\quad + a_1^2a_3^2 + a_2^2a_4^2 + a_5^2a_6^2 - 2(a_1a_2a_3a_4 + a_1a_3a_5a_6 + \end{aligned}$$

$+ a_2 a_4 a_5 a_6$).

З характеристичного многочлена $P_{A_2}(\lambda)$ знаходимо значення ваги a_6 . Далі, зі значень коефіцієнтів многочленів $P_{H_3^1}(\lambda)$, $P_{H_3^2}(\lambda)$, $P_{K_4}(\lambda)$ та $P_{H_3^3}(\lambda)$, одержуємо значення ваги a_5 , а також невпорядковані пари значень $\{a_1, a_2\}$, $\{a_3, a_4\}$ та $\{a_1, a_4\}$.

Аналіз показує, що у випадку, якщо $\{a_1, a_2\} = \{a_1, a_4\} = \{a_3, a_4\}$, наприклад, при $a_2 = a_4 = a$, $a_1 = a_3 = b$ та $a \neq b$, впорядкованих набір ваг (a_1, a_2, a_3, a_4) неможливо відновити однозначно. З метою ілюстрації наведемо приклад двох графів K_4 , які мають різні вагові функції, але однакові спектри відповідних індукованих підграфів (рис. 4).



Рис. 4

Аналогічно до першого, розглянемо *другий випадок* — коли ребро входить лише до одного з вибраних циклів; наприклад, ребро з вагою a_5 . Приклад двох зважених графів, поданих на рис. 4, демонструє неможливість однозначного відновлення вагової функції за відповідним набором підспектрів.

3. K_4 , $2C_3$, $2A_2$. Можемо розглянути довільні два цикли довжини три. Наприклад, виберемо цикли на вершинах $\{1, 2, 3\}$ та $\{1, 3, 4\}$.

Щодо вибору двох ребер маємо п'ять принципово різних варіантів.

- Спільне ребро вибраних циклів та ребро, яке суміжне з ним, наприклад, ребро $\{1, 2\}$ (рис. 5).

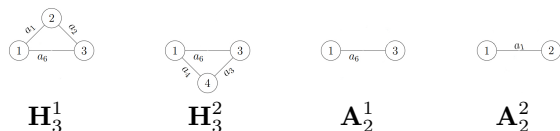


Рис. 5

Наведемо приклад двох графів K_4 , які мають різні вагові функції ($a_3 \neq a_4$), але однакові спектри вибраних підграфів (рис. 6).



Рис. 6

Наступні три варіанти аналогічні першому.

- Ребро, яке не належить двом вибраним циклам, та суміжне з ним ребро.
- Ребро, яке не належить двом вибраним циклам, та несуміжне з ним ребро.
- Два суміжні ребра в одному з вибраних циклів, які не є спільними для цих двох циклів.
- Два несуміжні ребра, кожне з яких належить рівно одному з двох вибраних циклів. Наприклад, ребра $\{1, 2\}$ та $\{3, 4\}$. Приклад двох зважених графів на рис. 7, де $a \neq b$, демонструє неможливість однозначного відновлення вагової функції за відповідним набором підспектрів.



Рис. 7

4. K_4 , C_3 , $3A_2$. Цикл можемо вибрати довільно. Розглянемо, наприклад, цикл на вершинах $\{1, 2, 3\}$. Для вибору трьох ребер існує шість принципово різних варіантів.

- Три ребра, що виходять з однієї вершини, яка не належить вибраному циклу, наприклад, з вершини 4. Тобто ребра $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$. Наведемо приклад двох графів K_4 , які мають різні вагові функції, але однакові спектри вибраних підграфів, де a, b, c, d — попарно різні додатні числа (рис. 8).



Рис. 8

- Три ребра, що виходять з однієї вершини, яка належить вибраному циклу, наприклад, з вершини 1.
- На рис. 9 наведено приклад двох графів K_4 , які мають різні вагові функції, але однакові спектри вибраних підграфів, де a, b, c — попарно різні додатні числа.

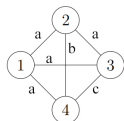


Рис. 9

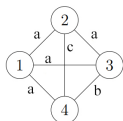
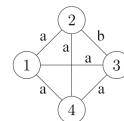
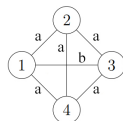


Рис. 13



- Три ребра, які належать вибраному циклу. На рис. 10 наведено приклад двох графів K_4 , які мають різні вагові функції, але однакові спектри вибраних підграфів, де $a \neq b$.

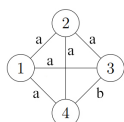
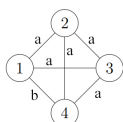


Рис. 10



- Три ребра, які належать одному циклу довжини три, відмінному від циклу $\{1, 2, 3\}$. Наприклад, ребра циклу $\{1, 2, 4\}$. Приклад двох графів K_4 , які мають різні вагові функції, але однакові спектри вибраних підграфів (де $b \neq d$), наведено на рис. 11.

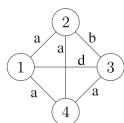
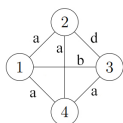


Рис. 11



- Три ребра, що належать одному ланцюгу довжини три, який має з вибраним циклом $\{1, 2, 3\}$ два спільні ребра. Наприклад, ребра $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}$. Приклад двох графів K_4 , які мають різні вагові функції, але однакові спектри вибраних підграфів (де $a \neq b$), наведено на рис. 12.

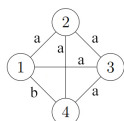
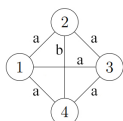


Рис. 12



- Три ребра, що належать одному ланцюгу довжини три, який має з вибраним циклом $\{1, 2, 3\}$ одне спільне ребро. Наприклад, ребра $\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}$. Приклад двох графів K_4 , які мають різні вагові функції, але однакові спектри вибраних підграфів (де $a \neq b$), наведено на рис. 13.

Отже, з наведених прикладів випливає, що цього набору підспектрів недостатньо для однозначного відновлення ваг усіх ребер.

5. $K_4, 4A_2$. Розглянемо два принципово різні варіанти вибору ребер:

- Чотири ребра, що утворюють цикл довжини 4. Наприклад, це можуть бути ребра $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}$. Наведемо приклад двох різних зважених графів K_4 , для яких вибрані набори підспектрів є рівними, хоча вагові функції різні при $a_5 \neq a_6$ (рис. 14).

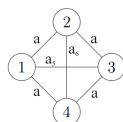
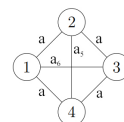


Рис. 14



- Три ребра, що утворюють цикл довжини 3, та ще одне ребро. Наприклад, ребра $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$. Наведемо приклад двох різних зважених графів K_4 , для яких вибрані набори підспектрів є рівними, хоча вагові функції різні при $a_3 \neq a_5$ (рис. 15).

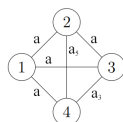
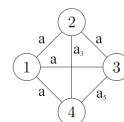


Рис. 15



6. $4C_3, A_2$. Неважливо, яке саме ребро вибрати. Наприклад, ребро $\{2, 4\}$. Розглянемо наступний приклад двох різних зважених графів K_4 , де $a \neq b$, для яких вибрані набори підспектрів є рівними (рис. 16).

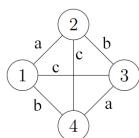
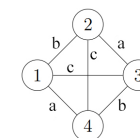


Рис. 16



Отже, такий набір підспектрів також не дозволяє однозначно відновити ваги всіх ребер.

7. $3C_3$, $2A_2$. Розглянемо довільні три цикли довжини 3. Наприклад, цикли на множинах вершинах $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$ (рис. 17).

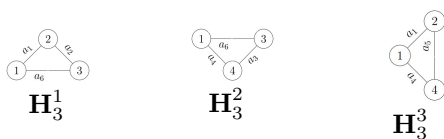


Рис. 17

Щодо вибору двох ребер маємо чотири принципово різні варіанти.

- Два ребра, кожне з яких входить до двох вибраних циклів. Наприклад, розглянемо вибір ребер $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$. Наведемо наступні два різні набори ваг: $a_3 = a_5 = a$, $a_4 = b$ та $a_3 = a_5 = b$, $a_4 = a$, де $a \neq b$. Спектри всіх вибраних підграфів рівні, хоча вагові функції різні (рис. 18).



Рис. 18

- Два несуміжні ребра: одне з них входить до двох вибраних циклів, інше — лише до одного. Наприклад, ребра $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$. Наведемо наступні два різні набори ваг: $a_2 = a_4 = a$, $a_5 = a_6 = b$ та $a_2 = a_4 = b$, $a_5 = a_6 = a$, де $a \neq b$. Спектри всіх вибраних підграфів рівні, хоча вагові функції різні (рис. 19).



Рис. 19

- Два суміжні ребра: одне з них входить до двох вибраних циклів, інше — лише до одного. Наприклад, ребра $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$. Наведемо наступні два різні набори ваг: $a_2 = a_3 = a$, $a_6 = b$ та $a_2 = a_3 = b$, $a_6 = a$, де $a \neq b$. Спектри всіх вибраних підграфів рівні, хоча вагові функції різні (рис. 20).



Рис. 20

- Два ребра, які трапляються у вибраних

циклах по одному разу. Наприклад, ребра $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$. Наведемо наступні два різні набори ваг: $a_1 = a_4 = a = 1$, $a_6 = b = 2$, $a_5 = d = 4\sqrt{\frac{2}{5}}$ та $a_1 = a_4 = b = 2$, $a_6 = a = 1$, $a_5 = c = \sqrt{\frac{2}{5}}$. Спектри всіх вибраних підграфів рівні, хоча вагові функції різні (рис. 21).



Рис. 21

Зауважимо, що приклад значень a, b, c, d підібрано таким чином, щоб спектри відповідних підграфів H_3^3 були рівними, тобто цей набір є розв'язком такої системи:

$$\begin{cases} 2b^2 + c^2 = 2a^2 + d^2; \\ b^2c = a^2d. \end{cases}$$

8. $2C_3$, $3A_2$. Без обмеження загальності, можемо розглянути довільні два цикли довжини три. Наприклад, цикли на вершинах $\{1, 2, 4\}$ та $\{2, 3, 4\}$ (рис. 22).



Рис. 22

Щодо вибору трьох ребер: для відновлення всіх ваг необхідно обрати ребро, яке не входить до жодного з вибраних циклів, тобто ребро $\{1, 3\}$. Далі є чотири принципово різні варіанти вибору ще двох ребер:

- Два ребра, які належать лише одному з вибраних циклів та не належать іншому. Наприклад, ребра $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$.
- Два ребра, одне з яких є спільним для вибраних циклів. Наприклад, ребра $\{1, 2\}$, $\{2, 4\}$. В обох цих випадках, коли $a_2 \neq a_3$, можемо поміняти ці ваги місцями, і спектри всіх вибраних графів залишатимуться незмінними, хоча вагові функції будуть різними.
- Два суміжні ребра, але які одночасно не належать жодному з вибраних циклів. Наприклад, ребра $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$.

Розглянемо наступні два різні набори ваг: $a_3 = a_4 = a$, $a_5 = b$ та $a_3 = a_4 = b$, $a_5 =$

$= a$, де $a \neq b$ (рис. 23). Спектри всіх вибраних підграфів залишатимуться незмінними, хоча вагові функції будуть різними.



Рис. 23

- Два несуміжні ребра. Наприклад, ребра $\{1, 2\}, \{3, 4\}$. Розглянемо наступні два різні набори ваг: $a_2 = a_4 = a, a_5 = b$ та $a_2 = a_4 = b, a_5 = a$, де $a \neq b$. Спектри всіх відповідних вибраних підграфів рівні, хоча вагові функції різні.

9. $C_3, 4A_2$. Без обмеження загальності, можемо вибрати довільний цикл довжини три. Щодо вибору ребер, то для відновлення усіх ваг необхідно взяти три ребра, які не належать вибраному циклу. Четверте ребро можна взяти будь-яке з циклу, оскільки кожне з трьох ребер циклу суміжне рівно з двома з решти ребер.

Наприклад, розглянемо цикл на множині вершин $\{1, 2, 3\}$, а також ребра на наступних парах вершин $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$ (рис. 24).

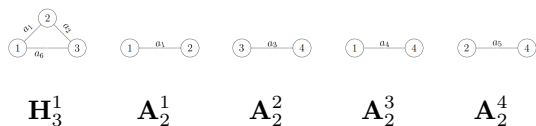


Рис. 24

Очевидно, що якщо поміняти місцями ваги a_2 і a_6 , то спектри вибраних підграфів не зміняться. Таким чином, довільний впорядкований набір додатних ваг, у якому $a_2 \neq a_6$, неможливо однозначно відновити.

10. $5A_2$. Очевидно, що п'яти довільних ребер недостатньо для відновлення всіх ваг графа K_4 , оскільки в такому випадку нічого не буде відомо про вагу шостого ребра.

Проаналізовано всі можливі варіанти вибору п'яти індукованих підграфів K_4 та доведено, що на основі відповідного набору підспектрів неможливо однозначно відновити ваги всіх ребер. А отже, п'яти підспектрів недостатньо для однозначного відновлення ваг у графах типу K_4 в загальному випадку. Оскільки для відновлення ваг завжди достатньо шести спектрів індукованих підграфів, кожен з яких породжений парою суміжних вершин, то $Srn(K_4) = 6$, таким чином, Теорему 2 доведено.

Зауважимо, що з доведеної теореми випливає, що K_4 є нетривіальним прикладом графа, для якого досягається рівність у верхній оцінці відновлюючого спектрального числа:

$$Srn(G) \leq |E(G)|.$$

Список літератури

1. Brouwer A. E., Haemers W. H. Spectra of Graphs. New York : Springer, 2011.
2. Cvetković D. Applications of Graph Spectra: An Introduction to the Literature. *Zbornik Radova*. 2011. Issue 22. Pp. 9–34.
3. Salim A., Sumitra S. Spectral Graph Convolutional Neural Networks in the Context of Regularization Theory. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2024. Vol. 35, No. 4. Pp. 4373–4384.
4. Sen S., Pal S., Sengupta S. Social Sensors in Epidemiological Networks via Graph Eigenvectors. arXiv preprint arXiv:2112.14385. 2021.
5. Hogben L. Spectral graph theory and the inverse eigenvalue problem of a graph. *Chamchuri Journal of Mathematics*. 2009. Vol. 1. Pp. 51–72.
6. Chu M. T. Inverse eigenvalue problems. *SIAM Review*. 1998. Vol. 40, No. 1. Pp. 1–39.
7. Chu M. T., Golub G. H. Structured inverse eigenvalue problems. *Acta Numerica*. 2002. Vol. 11. Pp. 1–71.
8. Nizhnik L. P., Rabanovich V. I. On new inverse spectral problems for weighted graphs. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2017. Vol. 23, No. 1, Pp. 66–75.
9. Sachs H. Beziehungen zwischen den in einem graphen enthaltenen kreisen und seinem charakteristischen polynom. *Publ. Math. Debrecen*. 1964. Bd. 11. S. 119–134.
10. Тимошкевич Л. М. Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізикоматематичні науки*. 2013. Т. 14. С. 165–175.
11. Тимошкевич Л. М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера: дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06. Київ, 2015. 160 с.
12. Пилипіва О. В., Тимошкевич Л. М. Обернені спектральні задачі для зважених графів. *Могиланський математичний журнал*. 2022. Т. 5. С. 26–32.

References

1. A. E. Brouwer and W. H. Haemers, *Spectra of Graphs* (Springer, New York, 2011).
2. D. Cvetković, *Zbornik Radova*. **22**, 9–34 (2011).
3. A. Salim and S. Sumitra, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. **35** (4), 4373–4384 (2024).
4. S. Sen, S. Pal, and S. Sengupta, *arXiv preprint arXiv:2112.14385* (2021).
5. L. Hogben, *Chamchuri Journal of Mathematics*. **1**, 51–72 (2009).
6. M. T. Chu, *SIAM Review*. **40** (1), 1–39 (1998).
7. M. T. Chu and G. H. Golub, *Acta Numerica*. **11**, 1–71 (2002).
8. L. P. Nizhnik and V. I. Rabanovich, *Methods of Functional Analysis and Topology*. **23** (1), 66–75 (2017).
9. H. Sachs, *Publ. Math. Debrecen*. **11**, 119–134 (1964).
10. L. M. Tymoshkevych, *Nauk. chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1. Fizyko-matematychni nauky*. **14**, 165–175 (2013).
11. L. M. Tymoshkevych, *PhD diss.*, Kyiv, 2015.
12. O. V. Pylypiva and L. M. Tymoshkevych, *Mohylanskyi matematychnyi zhurnal*. **5**, 26–32 (2022).

O. Averkin, L. Tymoshkevych

SPECTRAL RECONSTRUCTION NUMBER OF GRAPH K_4

In this work, we introduce new formulations of inverse spectral problems for weighted graphs in which certain spectral data (namely, the spectra of selected induced subgraphs) uniquely determine the edge weights of the original graph. To quantify this, we define the spectral reconstruction number of a graph $Srn(G)$ as the minimum number of spectra of induced subgraphs required to uniquely recover all edge weights of G .

Motivated by their broad range of applications, inverse spectral problems for various classes of matrices have been actively studied in the literature. These problems typically involve recovering a matrix, or part of it, from the spectrum of the matrix itself or from the spectra of its submatrices.

From a matrix-theoretic perspective, the problem concerns irreducible symmetric matrices with zero diagonal and nonnegative off-diagonal entries, which are adjacency matrices of connected edge-weighted graphs. Thus, the results obtained here offer new inverse spectral formulations for this class of matrices.

The main contribution of this paper is the exact determination of the spectral reconstruction number for the complete graph on four vertices.

Keywords: spectra of a graph, eigenvalues, inverse spectral problems, weighted graph, subgraphs of a graph.

Матеріал надійшов 10.04.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)