

ПРО ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ КЕРОВАНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ З ЛОКАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ ВЗАЄМОДІЇ

У статті розглянуто керовані випадкові поля з локальною структурою взаємодії та їхні застосування. Основну увагу приділено питанням застосування оптимального керування випадковими системами на графах, зокрема в аналізі ризику катастроф, моделюванні соціальних мереж та психометричному мережевому аналізі. Описано математичні підходи, що дозволяють формалізувати та вирішувати задачі стохастичної оптимізації в таких системах. Результати роботи можуть бути застосовані в економіці, кібербезпеці, соціальних науках та інших сферах.

Ключові слова: керовані випадкові поля, локальна взаємодія, оптимальні стратегії.

Вступ

Теорія стохастичної оптимізації і теорія керованих випадкових процесів достатньо повно представлені в науковій і навчальній літературі, натомість теорію керованих випадкових полів наразі висвітлено у відносно невеликій кількості публікацій. При цьому застосування теорії випадкових полів і керування ними потенційно доволі широке. У першу чергу завдяки отриманим результатам щодо існування і пошуку оптимальних стратегій керування випадковими полями для функцій ризику доволі широкого класу. В цій роботі розглядаються деякі можливі застосування теорії керованих випадкових полів з локальною структурою взаємодії до задач оцінки ризику катастроф, для моделювання і аналізу взаємодій у соціальних мережах, а також у психометричному мережевому аналізі.

Керовані випадкові поля з локальною структурою взаємодії

У цій роботі для опису керованих випадкових полів з елементами, що взаємодіють синхронно на підставі інформації про локальний стан, будемо використовувати матеріал роботи [1].

Для систем з локально взаємодіючими координатами структура взаємодії визначається неорієнтованим скінченим графом околів $\Gamma = (V, B)$ без петель і кратних ребер. Граф має множину вершин V і ребер B . Позначимо $\{k, j\}$ ребро графа, що з'єднує вершини k і j . Окіл вершини k — це множина вершин $N(k) = \{j: \{k, j\} \in B\}$. Повний окіл вершини k —

© Чорней Р. К., 2024

це $\tilde{N}(k) = N(k) \cup \{k\}$; тобто окіл вершини k , включно з k . Для всіх підмножин $K \subset V$ визначимо окіл $N(K) = \bigcup_{k \in K} N(k) - K$, і повний окіл $\tilde{N}(K) = N(K) \cup K$.

Нехай для кожної вершини $i \in V$ $(X_i, \mathfrak{X}_i)$ заданий деякий польський вимірний простір $X_i \neq \emptyset$ з борелівською σ -алгеброю $\mathfrak{X}_i$. X_i , що відповідає $(X_i, \mathfrak{X}_i)$, називатимемо локальним простором станів вершини i . Далі обладнаємо $X := \prod_{i \in V} X_i$ мультиплікативною σ -алгеброю $\mathfrak{X} = \sigma\left\{\prod_{i \in V} \mathfrak{X}_i\right\}$, породженою добутком $\prod_{i \in V} \mathfrak{X}_i$. X , що відповідає $(X, \mathfrak{X})$, — глобальний простір станів системи. Для кожної підмножини вершин $K \subset V$ позначимо маргінальний вектор стану $x = (x_i: i \in V)$ так: $x_K = (x_k: k \in K) \in X_K = \prod_{i \in K} X_i$.

Визначимо для $K \subseteq V$ σ -алгебру $\mathfrak{X}_K = \sigma\left\{\prod_{i \in K} \mathfrak{X}_i\right\} = \bigotimes_{i \in K} \mathfrak{X}_i$, породжену $\prod_{i \in K} \mathfrak{X}_i$, а $\mathfrak{X}_V = \mathfrak{X}$.

Означення 1 (див. означення 3.2 в [1]). 1) Випадкову величину

$$\xi: (\Omega, \mathcal{F}, \Pr) \rightarrow (X, \mathfrak{X}) = \left(\prod_{i \in V} X_i, \bigotimes_{i \in V} \mathfrak{X}_i \right)$$

називають випадковим полем на $\Gamma = (V, B)$ (або просто випадковим полем на V). Для $\emptyset \neq K \subseteq V$ маргінальні випадкові величини зі значеннями в просторі X_K позначатимемо ξ_K . У разі $K = \{k\}$ писатимемо ξ_k .

2) Випадкове поле ξ на (V, B) називають марковським полем, якщо для всіх $k \in V$ виконується:

$$\Pr \{ \xi_k \in C_k \mid \xi_{V-\{k\}} = x_{V-\{k\}} \} =$$

$$= \Pr \{ \xi_k \in C_k \mid \xi_{N(k)} = x_{N(k)} \}, \\ \forall x \in X, \quad C_k \in \mathfrak{X}_k, \quad (1)$$

де $\Pr \{ \xi_k \in C_k \mid \xi_{N(k)} = x_{N(k)} \}$, відповідно $\Pr \{ \xi_k \in C_k \mid \xi_{V-\{k\}} = x_{V-\{k\}} \}$, — регулярні умовні ймовірності на $(X_k, \mathfrak{X}_k)$ для заданого $\xi_{N(k)} = x_{N(k)}$, відповідно $\xi_{V-\{k\}} = x_{V-\{k\}}$.

3) (Канонічне випадкове поле) Часто припускаємо, що $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ у частині (1) означення є канонічним простором. Тоді ξ_K і ξ_k — відповідні проекції і $\Pr^\xi = \Pr$.

4) (Дискретні стани) Якщо всі локальні простори станів дискретні, то зазвичай утотожнюватимемо розподіл випадкового поля та його зліченні щільності і писатимемо у випадку наявності канонічного основного ймовірнісного простору $\Pr(\xi = x) = \Pr^\xi \{x\} = \Pr(x)$, $x \in X$.

Якщо марковський процес ξ за його побудовою відповідає системі околів $\{N(k) : k \in V\}$ на (V, B) , природно припустити, що у відповідності до еволюції в часі ймовірність події $\{\xi_k^t = x_k\}$ в k -й вершині залежить від попередніх станів усієї системи тільки через значення станів вершин з околу $\tilde{N}(k)$ (включно з k) у момент часу $t-1$. Для опису цього введемо поняття марковської властивості у просторі і часі відповідно до означення 1.

Означення 2 (див. означення 3.10 в [1]). Нехай $\xi = \{\xi^t, t = 0, 1, \dots\}$, $\xi^t : (\Omega, \mathcal{F}, \Pr) \rightarrow (X, \mathfrak{X})$ — марковський процес з дискретним часом і простором станів

$$(X, \mathfrak{X}) = \left(\times_{i \in V} X_i, \bigotimes_{i \in V} \mathfrak{X}_i \right).$$

Перехідні ймовірності ξ називають *локальними* [2, с. 100], якщо

$$\Pr \{ \xi_k^{t+1} \in C_k \mid \xi^t = x^t, \dots, \xi^0 = x^0 \} = \\ = \Pr \{ \xi_k^{t+1} \in C_k \mid \xi_{\tilde{N}(k)}^t = x_{\tilde{N}(k)}^t \} \quad (2)$$

для $k \in V$, $x^0, \dots, x^t \in X$, $C_k \in \mathfrak{X}_k$ виконується $\Pr^{(\xi^t, \dots, \xi^0)}$ -майже всюди; тобто перехідна ймовірність вершини k залежить тільки від стану її повного околу у попередній момент часу.

Перехідні ймовірності ξ називають *синхронними* [2, с. 100], якщо

$$\Pr \{ \xi_K^{t+1} \in C_K \mid \xi^t = x^t \} = \\ = \prod_{k \in K} \Pr \{ \xi_k^{t+1} \in C_k \mid \xi^t = x^t \} \quad (3)$$

для всіх $K \subset V$, $x^t \in X$, $C_K = \times_{k \in K} C_k \in \mathfrak{X}_K$ виконується $\Pr^{\xi^t}$ -майже всюди.

Якщо ξ задовольняє (2) і (3), то її називають *марковським процесом з локально взаємодіючими синхронними компонентами* на (Γ, X) , коротко — (*залежне від часу*) *марковське випадкове поле*.

Далі опишемо структуру моделей прийняття рішень з локальними та синхронними координатами.

Означення 3 (див. означення 3.16 в [1]). Послідовність моментів прийняття рішень (моментів керування) — часова шкала $\mathbb{N}$.

1) Простір рішень (множина керуючих впливів), можливих в моменти прийняття рішень, — $A = \times_{i \in V} A_i$ на Γ , де A_i — множина можливих дій (рішень) для вершини i . Припускаємо, що A_i — польський простір з борелівською σ -алгеброю $\mathfrak{A}_i$. $\mathfrak{A}$ — борелівська σ -алгебра добутку на A .

2) Якщо для рішень в вершині i в момент часу t з історією $h^t \in H^t$ множина керуючих впливів обмежена $A_i^t(h^t) \subseteq A_i$, називатимемо $A_i^t(h^t)$ множиною локально допустимих дій (рішень) в момент часу t з історією $h^t \in H^t$.

3) Припускаємо, що таким чином визначене множиннозначне відображення

$$A_i^t : H^t \rightarrow 2^{A_i} - \{\emptyset\}, \quad h \rightarrow A_i^t(h), \quad i \in V,$$

залежить тільки від локальної історії і вимірне за Борелем.

Тут для заданої історії

$$h^t = (x^0, a^0, x^1, a^1, x^2, \dots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t) \in H^t$$

локальна історія $h_i^t \in H_i^t$ вершини i визначається як

$$h_i^t = (x_{\tilde{N}(i)}^0, a_i^0, x_{\tilde{N}(i)}^1, a_i^1, x_{\tilde{N}(i)}^2, \dots, \\ x_{\tilde{N}(i)}^{t-1}, a_i^{t-1}, x_{\tilde{N}(i)}^t) \in H_i^t.$$

H_i^t наділена слідом $\mathfrak{H}_i^t$ σ -алгебри добутку простору $(X_{\tilde{N}(i)} \times A_i)^t \times X_{\tilde{N}(i)}$. Також припускаємо, що множини $K_i^t = \left\{ (h_i^t, a_i) : h_i^t \in H_i^t, a_i \in A_i^t(h^t) \right\}$ містять графік вимірного відображення і є вимірними за Борелем в сліді σ -алгебри добутку $\mathfrak{K}_i^t := K_i^t \cap (\mathfrak{H}_i^t \times \mathfrak{A}_i)$.

Крім того, множини

$$\kappa_i^t = \left\{ (x_{\tilde{N}(i)}, a_i) : x_{\tilde{N}(i)} \in X_{\tilde{N}(i)}, a_i \in A_i^t(x_{\tilde{N}(i)}) \right\}$$

припускаються вимірними за Борелем множинами в просторі $X_{\tilde{N}(i)} \times A_i$, а $\kappa^t = \times_{i \in V} \kappa_i^t$ вимірною за Борелем в просторі $\tilde{X} \times A$, де $\tilde{X} = \times_{i \in V} X_{\tilde{N}(i)}$ і $\tilde{\mathfrak{X}} = \sigma \left\{ \times_{i \in V} \mathfrak{X}_{\tilde{N}(i)} \right\}$.

Якщо відображення A_i^t не залежать від t , писатимемо $\kappa_i := \kappa_i^t$, $t \in \mathbb{N}$, $i \in V$; $\kappa := \kappa^t$, $t \in \mathbb{N}$.

Означення 4 (див. означення 3.17 в [1]). Нехай α_i^t — рішення, що обирається в вершині i в момент часу t , $\alpha^t := (\alpha_i^t : i \in V)$ — сумісний вектор рішень в момент часу t .

1) Рандомізована стратегія (політика) $\pi = (\pi^t : t \in \mathbb{N})$ керованої системи з взаємодіючими компонентами і простором рішень у формі добутку визначається як вектор локальних політик $\pi = (\pi_i, i \in V)$, де для вершини i $\pi_i = \{\pi_i^0, \dots, \pi_i^t, \dots\}$ — послідовність перехідних імовірностей

$$\pi_i^t = \pi_i^t(\cdot \mid x^0, a^0, \dots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t).$$

Таким чином, π_i^t — ймовірнісна міра на $(A_i, \mathfrak{A}_i)$ для всіх $(x^0, a^0, \dots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t)$ і вимірним чином залежить від історії $h^t = (x^0, a^0, \dots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t)$ системи до t -го переходу. Отже, маємо для будь-яких $B_i \in \mathfrak{A}_i$

$$\begin{aligned} \Pr \{ \alpha_i^t \in B_i \mid \xi^0 = x^0, \alpha^0 = a^1, \dots, \\ \xi^{t-1} = x^{t-1}, \alpha^{t-1} = a^{t-1}, \xi^t = x^t \} \\ = \pi_i^t(B_i \mid x^0, a^0, \dots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t). \end{aligned} \quad (4)$$

2) Паралельно з синхронними переходами і локальністю перехідних ядер завжди припускаємо, що прийняття рішень у вершинах здійснюється умовно незалежно від заданої історії системи. Це призводить до управління процесом, керованим синхронним ядром переходу

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ \alpha^t \in \prod_{i \in V} B_i \mid \xi^0 = x^0, \alpha^0 = a^0, \dots, \right. \\ \left. \dots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \alpha^{t-1} = a^{t-1}, \xi^t = x^t \right\} \\ = \prod_{i \in V} \Pr \{ \alpha_i^t \in B_i \mid \xi^0 = x^0, \alpha^0 = a^0, \dots, \\ \dots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \alpha^{t-1} = a^{t-1}, \xi^t = x^t \} \\ = \prod_{i \in V} \pi_i^t(B_i \mid x^0, a^0, \dots, x^{t-1}, a^{t-1}, x^t), \\ B_i \in \mathfrak{A}_i, \quad a^s \in A, \quad x^s \in X. \end{aligned} \quad (5)$$

Означення 5 (див. означення 3.18 в [1]). 1) Нехай в моменти переходу $t = 0, 1, \dots$, множини допустимих рішень згідно з означенням 3 (**3**) залежать тільки від локальної історії, і рішення α_i^t вершини i виробляється відповідно до ймовірності π_i^t на підставі інформації тільки про локальну історію $h_i^t = (x_{\tilde{N}(i)}^0, a_i^0, \dots, x_{\tilde{N}(i)}^{t-1}, a_i^{t-1}, x_{\tilde{N}(i)}^t)$ станів околу $\tilde{N}(i)$ вершини i і попередніх рішень в i . Якщо $\pi_i^t(A_i^t(h_i^t) \mid h_i^t) = 1$, то π_i^t називатимемо локаль-

но допустимою, а послідовність перехідних імовірностей (рішень) $\pi_i = \{\pi_i^t, t \in \mathbb{N}\}$ — допустимою локальною стратегією для вершини i .

$\pi = (\pi_i, i \in V)$ називатимемо допустимою локальною стратегією для моделі прийняття рішень.

2) Допустиму локальну стратегію $\pi = (\pi_i, i \in V)$ називають допустимою локальною марковською стратегією, якщо

$$\begin{aligned} \pi_i^t(\cdot \mid x_{\tilde{N}(i)}^0, a_i^0, \dots, x_{\tilde{N}(i)}^{t-1}, a_i^{t-1}, x_{\tilde{N}(i)}^t) \\ = \pi_i^t(\cdot \mid x_{\tilde{N}(i)}^t), \quad i \in V. \end{aligned}$$

Зазначимо, що як тільки маємо справу з локальними марковськими стратегіями, можемо припустити, що $A_i^t(h_i^t)$ залежить тільки від h_i^t через $x_{\tilde{N}(i)}^t$; ця зменшена залежність виражається як $A_i^t(h_i^t) =: A_i^t(x_{\tilde{N}(i)}^t)$.

3) Допустиму локальну марковську стратегію $\pi = (\pi_i, i \in V)$ називають допустимою локальною стаціонарною (марковською) стратегією, якщо $\pi_i^{t'}(\cdot \mid x_{\tilde{N}(i)}^{t'}) = \pi_i^{t''}(\cdot \mid x_{\tilde{N}(i)}^{t''})$, $i \in V$, для всіх t', t'' і всіх x .

4) Допустиму локальну стаціонарну (марковську) стратегію $\pi = (\pi_i, i \in V)$ називають допустимою локальною стаціонарною детермінованою (нерандомізованою) стратегією, якщо $\pi_i(\cdot \mid x_{\tilde{N}(i)}), i \in V$, — одноточкова міра на $A_i^t(x_{\tilde{N}(i)}), i \in V$, для всіх $x \in X$.

Клас усіх допустимих локальних стратегій позначатимемо LS ; підклас допустимих локальних марковських стратегій — LS_M . Як LS_S позначатимемо клас допустимих локальних стаціонарних стратегій, LS_P — клас допустимих локальних детермінованих (= чистих) стратегій, LS_{PM} — клас допустимих локальних стаціонарних (марковських) детермінованих стратегій.

Зауваження 1. Маємо $LS_D \subseteq LS_S \subseteq LS_M \subseteq LS$ і $LS_D \subseteq LS_{PM} \subseteq LS_P \subseteq LS$.

Наша мета полягає в тому, щоб прийти до марковської структури, подібної до означення 2. Побудова процесу приведе нас до припущення, що закони руху для системи можна охарактеризувати інваріантним у часі набором ймовірностей переходу. Тобто, коли система перебуває в стані y і прийнято рішення, що діє a , то, незалежно від своєї історії, наступний стан вибирається відповідно до закону переходу, який залежить тільки від (y, a) .

Використовуючи це, стратегія π визначить імовірнісну міру на просторі послідовностей $(a^0, a^1, \dots)$ для кожного фіксованого початко-

вого стану x^0 . Пару (ξ, π) будемо називати керованою версією ξ з використанням стратегії π . Керований процес взагалі не буде марковським, тому що функції π_i^t , $i \in V$, залежать не тільки від станів $x_{\tilde{N}(i)}^t$, $i \in V$, а й від попередніх (локальних) станів $x_{\tilde{N}(i)}^0, \dots, x_{\tilde{N}(i)}^{t-1}$. Властивість Маркова введена в наступному означенні, після чого обговорюватимуться принципи.

Означення 6 (див. означення 3.21 в [1]). Пару (ξ, π) — керований процес з локально взаємодіючими синхронними компонентами, заданий на скінченному графі взаємодій $\Gamma = (V, B)$, якщо $\xi = (\xi^t : t \in \mathbb{N})$ — процес з простором станів $X = \prod_{i \in V} X_i$ і $\pi = (\pi_i : i \in V)$ — допустима локальна стратегія.

Пару (ξ, π) називають керованим марковським процесом з локально взаємодіючими синхронними компонентами на (Γ, X) , коротше — (залежне від часу) кероване марковське випадкове поле, якщо переходи ξ визначаються таким чином:

Для всіх t $\Pr(\xi^0, \alpha^0, \dots, \xi^{t-1}, \alpha^{t-1}, \xi^t, \alpha^t)$ -майже всюди визначені умовні ймовірності, що задовольняють для всіх $K \subseteq V$, $C_j \in \mathfrak{X}_j$, $j \in K$, $y \in X$, $a_j \in A_j(y_{\tilde{N}(j)})$, $C_K = \prod_{j \in K} C_j$

$$\begin{aligned} & \Pr \{ \xi_K^{t+1} \in C_K \mid \xi^0 = x^0, \alpha^0 = a^0, \dots, \\ & \dots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \alpha^{t-1} = a^{t-1}, \xi^t = y, \alpha^t = a \} \\ & \stackrel{(1)}{=} \Pr \{ \xi_K^{t+1} \in C_K \mid \xi^t = y, \alpha^t = a \} \\ & \stackrel{(2)}{=} \prod_{j \in K} \Pr \{ \xi_j^{t+1} \in C_j \mid \xi^t = y, \alpha^t = a \} \\ & \stackrel{(3)}{=} \prod_{j \in K} \Pr \{ \xi_j^{t+1} \in C_j \mid \xi_{\tilde{N}(j)}^t = y_{\tilde{N}(j)}, \alpha_j^t = a_j \} \\ & \stackrel{(4)}{=} \prod_{j \in K} Q_j(C_j \mid y_{\tilde{N}(j)}, a_j) \\ & \stackrel{(5)}{=} Q_K(C_K \mid y, a). \end{aligned} \quad (6)$$

Якщо $K = V$, будемо писати $Q_V(C_V \mid y, a) = Q(C \mid y, a)$.

Марковське ядро $Q = \prod_{j \in V} Q_j$ називатимемо локальним і синхронним.

Застосування

Просторовий опис катастроф. У роботі [3] пропонується застосувати результати роботи [1] до розв'язання проблеми катастрофічних ризиків. Припускається, що можливі стани x_i^t і втрати z_i^t системи в вершині i у момент часу t визначаються випадковим процесом (наприклад, природною катастрофою) ξ^t з можливими станами $y \in Y$. Через

$H^i(x_i^t, z_i^t \mid x_{\tilde{N}(i)}^{t-1}, z_{\tilde{N}(i)}^{t-1}, y; u_{\tilde{N}(i)}^{t-1})$ позначимо умовні розподіли пари (x_i^t, z_i^t) в момент часу t за умови, що у попередній момент часу стани і втрати в околі $\tilde{N}(i)$ були $(x_{\tilde{N}(i)}^{t-1}, z_{\tilde{N}(i)}^{t-1})$, процес ξ^{t-1} був у стані y і були прийняті рішення $u_{\tilde{N}(i)}^{t-1}$. Такий розподіл визначає динаміку змін в системі згідно з таким співвідношенням:

$$\begin{aligned} p(t, x_i^t, z_i^t) &= \sum_{y \in Y} H^i(x_i^t, z_i^t \mid x_{\tilde{N}(i)}^{t-1}, z_{\tilde{N}(i)}^{t-1}, y; u_{\tilde{N}(i)}^{t-1}) \\ &\quad \times P(\xi^{t-1} = y), \end{aligned}$$

де $p(t, x_i^t, z_i^t)$ — розподіл пар (x_i^t, z_i^t) в момент часу t в вершині i . Додаткова фіксація початкового розподілу станів $p(0, x_i, z_i)$ для всіх $i \in V$ повністю визначає динаміку змін станів системи.

Далі автори роботи [3] пропонують просторове узагальнення моделі керування довгостроковими інвестиціями у безпеку. У цьому разі стани вершин графа трактуються як рівні багатства агентів економічної системи, а ребра — наявність зв'язків між агентами. У випадкові моменти часу в кожній вершині $i \in V$ може відбутися катастрофічна подія або терористична атака (незалежно від подій в інших вершинах), які характеризуються випадковою величиною ξ_i . Припускається, що деякі ресурси u_{ij} віднімаються від x_i і потім інвестуються в заходи безпеки в вершину $j \in N(i)$. Повні інвестиції в заходи безпеки в вершині j становлять $\sum_{i \in \tilde{N}(j)} u_{ij}$. Інвестиції в заходи безпеки зменшують інтенсивність атак, які у такому разі вже залежать і від інвестицій, тобто $p_i = p_i(x_i, u_i)$. Крім того, інвестиції в засоби захисту у вузлі i можуть зменшити збитки з коефіцієнтом проприційності

$$\xi_i(x_i, u_i) = \begin{cases} 0 & \text{з імовірністю } 1 - p_i(x_i, u_i), \\ \zeta_i(x_i, u_i) & \text{з імовірністю } p_i(x_i, u_i). \end{cases}$$

Далі автори припускають, що темпи економічного розвитку ρ_i^t у вузлі i залежать від власних індикаторів зростання $(1 + r_i)$ і збитків $(1 - \xi_i)$, а також факторів зростання/збитків у сусідніх вузлах, тобто $\rho_i^t = \rho_i^t(r_{\tilde{N}(i)}^t, \xi_{\tilde{N}(i)}^t)$. Відповідна динамічна модель економіки набуває вигляду

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= (x_i^t - u_i^t) \rho_i^t(r_{\tilde{N}(i)}^t, \xi_{\tilde{N}(i)}^t), \\ x_i^0 &= x_i, \quad t = 0, \dots, T-1, \end{aligned}$$

де $r_{\tilde{N}(i)}^t = (r_j^t, j \in \tilde{N}(i))$ — сукупність випадкових індикаторів зростання у вузлах $\tilde{N}(i)$; $\xi_{\tilde{N}(i)}^t$ — сукупність показників збитків у вузлах $\tilde{N}(i)$ в

період часу t від атаки на вузол i або на сусідні вузли $j \in \tilde{N}(i)$; $u_i^t = \sum_{j \in \tilde{N}(i)} u_{ji}^t$ — інвестиції у безпеку вузла i з самого вузла i і з сусідніх вузлів $j \in N(i)$. Залежність добробуту даного вузла i мережі від сусідів може спонукати вузол i зробити інвестиції $u_{ij} > 0$ в сусідні вузли $j \in N(i)$.

Цільовий функціонал для оптимізації витрат на безпеку може мати вигляд

$$\vec{F}(x, u) = \mathbf{E} \sum_{k=0}^T \gamma^k \sum_{i \in V} \vec{f}_i(x_i^t) \rightarrow \max_{u \in U}$$

або

$$\vec{F}(x, u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} \frac{1}{T+1} \sum_{k=0}^T \sum_{i \in V} \vec{f}_i(x_i^t) \rightarrow \max_{u \in U},$$

де $\vec{f}_i(\cdot, \cdot)$ — векторна функція корисності капіталу у вузлі i ; $\gamma \in (0; 1]$ — дисконтуючий множник; $\mathbf{E}$ — математичне сподівання, $x = \{x_i, i \in V\}$, $u = \{u_{ij}, i, j \in V\}$, $U = \{u_{ij} \geq 0 \mid \sum_{j \in \tilde{N}(i)} u_{ij} \leq x_i, i, j \in V\}$. Обидві задачі багатокритеріальні, причому компоненти векторної функції $\vec{f}_i(\cdot, \cdot)$ можуть відображати різні аспекти корисності та ризику у вузлі i .

Соцмережі. Не менш цікавим застосуванням теорії керованих марковських полів є моделювання соцмереж. Наприклад, у роботі [4] розглядається така графічна модель соціальної взаємодії.

Розглянемо соціальну мережу з n індивідів або вузлів. Вузол i асоціюється з впливом A_i , результатом Y_i і, можливо, коваріантами. Наприклад, Y може представляти думки або рекламні кампанії; Y може відображати поведінку, а A — заохочувальні втручання, або Y може представляти інфекційне захворювання, а A — вакцинацію. У аналізі рішень Верховного суду США, поданому в роботі [4], Y_i — це бінарна змінна, яка відображає, чи було рішення судді i ліберальним чи консервативним, а A_i , яке одночасно охоплює всіх суддів, є індикатором сфери розгляду справи. Коли переконання або думки індивідів проходять фазові переходи до впорядкованих станів, наприклад, коли є зовнішній тиск досягти одноставного консенсусу, або коли можна стверджувати, що розподіл поведінки, переконань, думок або інших результатів досягає рівноваги в межах зв'язків мережі, тоді ланцюговий граф може бути правильним підходом для моделювання спільного розподілу результатів у мережі та впливів на ці результати. Наприклад, у даних Верховного суду США результати представляють рішення, ухвалені за умов часових обмежень та під тиском дев'яти

суддів досягти одноставного рішення; ці рішення можуть справді перебувати в стані рівноваги.

У статті розглядається застосування керованих марковських полів у контексті каузального аналізу в соціальних мережах та ланцюгових графах. Дослідження обґрунтовує використання ланцюгових графів як інструменту для моделювання взаємодій між індивідуальними одиницями, що піддаються впливу соціальних зв'язків, інтерференції та поширення результатів.

Напрявлені ациклічні графи (DAG) і ланцюгові графи використовують для визначення статистичних і причинно-наслідкових моделей. Статистичні графічні моделі пов'язують спостережуваний розподіл даних $p(V)$ із графом, де вершини пов'язані з випадковими величинами у V . Графічні моделі часто визначаються за допомогою факторизації, де $p(V)$ можна записати як добуток менших факторів із правилом для отримання цих факторів, заданим графом. Причинно-наслідковий висновок із даних спостережень полягає в тому, щоб робити висновки щодо фактичних або потенційних значень випадкових величин на основі розподілу даних спостереження $p(V)$. Параметри причинно-наслідкових зв'язків, що становлять першочерговий інтерес, як правило, є слабовимірними підсумками, отриманими з розподілів, а не самих розподілів. Наприклад, середній причинно-наслідковий ефект визначається як середній контраст $\mathbf{E}[Y(a)] - \mathbf{E}[Y(a')]$. Причинно-наслідкові моделі DAG є потужними інструментами для визначення причиновості з використанням даних спостережень і набули широкого застосування в епідеміології, соціальних науках та інших галузях і можуть бути використані для виведення теорії ідентифікації у складних багатовимірних причинно-наслідкових системах.

Керовані марковські поля використовують як спосіб параметризації мережевих даних, що дозволяє зменшити вимоги до обсягу даних і полегшує обчислення й оцінювання моделей. У статті продемонстровано, що такі моделі можуть ефективно описувати процес формування колективних рішень, зокрема на прикладі рішень Верховного суду США.

Авторами обґрунтовано, що традиційні методи каузального аналізу, основані на напрямлених ациклічних графах (DAGs), можуть бути непридатними для аналізу взаємодій у соціальних мережах через їхню складність і вимоги до обсягу даних. Натомість ланцюгові графи забезпечують більш компактне подання залежностей та дають змогу формалізувати рівноважні стани взаємодій у соціальних мережах.

Психологія. Яскравим прикладом застосування графічних моделей у психології є стаття [5], яка фокусується на використанні психометричного мережевого аналізу для дослідження структури та взаємозв'язків у багатовимірних даних, зокрема в психологічних дослідженнях. При цьому слід виділити такі основні моменти:

- для аналізу мережі використовують графічні моделі, де вузли представляють змінні, а ребра — умовні асоціації між ними, мережі дозволяють виявляти патерни асоціацій, які часто відображають латентну структуру даних;
- для оцінки мережевих структур визначається топологія мережі, зокрема щільність зв'язків, центральність вузлів та структура кластерів, мережі аналізуються через контекст тимчасових даних (наприклад, часові ряди) або панельних досліджень;
- щодо застосування результатів можна виділити такі особливості: у дослідженнях особистості мережі дозволяють описати взаємозв'язок між рисами характеру та мотиваційними цілями; у сфері вивчення ставлень моделюються зміни в оцінках важливості ставлень, що допомагає пояснити поляризацію; у дослідженнях психічного здоров'я мережі відображають взаємозв'язки між симптомами, що сприяє кращому розумінню причин та можливих втручань;
- виділяють такі переваги парних марковських випадкових полів: гнучкість у дослідженні умовних залежностей без необхідності жорстких апіорних припущень, мережі забезпечують наочне представлення даних, сприяючи генерації гіпотез;
- разом з тим, є певні обмеження та виклики, серед яких труднощі з інтерпретацією центральності вузлів і залежність від вибору змінних, необхідність додаткових досліджень для вдосконалення методів оброблення даних, наприклад, для пропущених або неоднорідних даних.

Стаття наголошує на важливості мережевого аналізу як потужного інструменту для розуміння складних взаємозв'язків у багатовимірних даних, особливо в психологічній науці.

Висновки

Теорія керованих випадкових полів, попри свою відносну молодість порівняно з теорією стохастичної оптимізації та керованих випадкових процесів, демонструє значний потенціал для практичного застосування. Важливим досягненням у цій галузі є отримання фундаментальних результатів щодо існування та методів пошуку оптимальних стратегій керування випадковими полями для широкого класу функцій ризику. Особливу увагу привертає можливість застосування цієї теорії у випадках, де наявна локальна структура взаємодії. Напрями практичного використання не обмежуються оцінкою ризиків катастроф, моделюванням та аналізом взаємодій у соціальних мережах, а також психометричним мережевим аналізом. Це свідчить про міждисциплінарний характер теорії та її потенційну універсальність у застосуванні до різних предметних галузей. Подальший розвиток теорії потребує розширення наукової та навчальної літератури, а також розроблення методології застосування до конкретних практичних задач. Локальна структура взаємодії виступає ключовою характеристикою, що визначає специфіку застосування теорії, тому важливим є розвиток методів оптимізації для різних класів функцій ризику, що відповідають реальним практичним ситуаціям. Для ефективного впровадження теоретичних результатів необхідно зосередити увагу на розробленні спеціалізованих методів для кожного з визначених напрямів застосування, розвитку математичного апарату для більш точного опису локальних структур взаємодії та створенні відповідних програмних інструментів. Особливу увагу слід приділити розробленню методів, що дозволяють враховувати специфіку локальних взаємодій у конкретних практичних ситуаціях. Таким чином, незважаючи на відносно обмежену представленість у науковій літературі, теорія керованих випадкових полів має значний потенціал для практичного застосування в різних галузях. Подальший розвиток теорії та методології її застосування може суттєво вплинути на ефективність розв'язання важливих практичних задач у різних сферах людської діяльності, від технічних аспектів оцінки ризиків катастроф до соціальних та психологічних аспектів аналізу мереж взаємодії.

Список літератури

1. Chorney R. K., Daduna H., Knopov P. S. Control of Spatially Structured Random Processes and Random Fields with Applications. Springer Science + Business Media, Inc. 2006.
2. Vasilyev N. B. Bernoulli and Markov stationary measures in discrete local interactions. Dobrushin R. L., Kryukov V. I., Toom, A. L., eds. *Locally Interacting Systems and Their Application in Biology, Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1978. Pp. 99–112.
3. Haivoronskyi O. O., Ermoliev Yu. M., Knopov P. S., Norkin V. I. Mathematical Modeling of Distri-

- buted Catastrophic and Terrorist Risks. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51 (1). Pp. 85–95.
4. Ogburn E. L., Shpitser I., Lee Y. Causal inference, social networks and chain graphs. *J. R. Stat. Soc. Ser. A Stat. Soc.* 2020. Vol. 183 (4). Pp. 1659–1676.
5. Borsboom D., Deserno M. K., Rhemtulla M., Epskamp S., Fried E. I., McNally R. J., Robinaugh D. J., Perugini M., Dalege J., Costantini G., Isvoranu A.-M., Wysocki A. C., van Borkulo C. D., R. van Bork and L. J. Waldorp. Network analysis of multivariate data in psychological science. *Nature Reviews Methods Primers*. 2021. Vol. 1 (1). Pp. 1–18.

References

1. R. K. Chorney, H. Daduna, and P. S. Knopov, *Control of Spatially Structured Random Processes and Random Fields with Applications* (Springer Science + Business Media, Inc., 2006).
2. N. B. Vasilyev, in: R. L. Dobrushin and, V. I. Kryukov and, A. L. Toom, eds., *Locally Interacting Systems and Their Application in Biology, Lecture Notes in Mathematics* (Springer Verlag, 1978), pp. 99–112.
3. O. O. Haivoronskyi, Yu. M. Ermoliev, P. S. Knopov, and V. I. Norkin, *Cybernetics and Systems Analysis*. **51** (1), 85–95 (2015).
4. E. L. Ogburn, I. Shpitser, and Y. Lee, *J. R. Stat. Soc. Ser. A Stat. Soc.* **183** (4), 1659–1676 (2020).
5. D. Borsboom, M. K. Deserno, M. Rhemtulla, S. Epskamp, E. I. Fried, R. J. McNally, D. J. Robinaugh, M. Perugini, J. Dalege, G. Costantini, A.-M. Isvoranu, A. C. Wysocki, C. D. van Borkulo, R. van Bork, and L. J. Waldorp, *Nature Reviews Methods Primers*. **1** (1), 1–18 (2021).

R. Chorney

ON SOME APPLICATIONS OF CONTROLLED RANDOM FIELDS WITH LOCAL INTERACTION STRUCTURE

This paper explores controlled random fields with a local interaction structure and the fields' potential applications. The primary focus is on optimal control problems for stochastic systems defined on graphs, emphasizing risk assessment, social network modeling, and psychometric network analysis. The study formalizes mathematical approaches that facilitate stochastic optimization and decision-making in complex systems with locally structured interactions.

The theoretical framework is developed within the context of Markov random fields, where interactions are defined on finite graphs. The article introduces a mathematical model that captures local dependencies among interacting elements and derives methods for optimizing their collective behavior. A key result concerns the existence and characterization of optimal control strategies in stochastic environments, demonstrating their applicability to risk management and dynamic decision-making.

The paper also discusses the use of controlled Markov fields in social network modeling. Specifically, it examines how individuals influence each other within structured networks and how equilibrium states emerge under specific interaction rules. This modeling technique proves useful in predicting opinion dynamics, social polarization, and decision-making in hierarchical systems.

A further application is psychometric network analysis, where controlled random fields facilitate the study of cognitive and psychological interactions among individuals. The methodology enables the identification of latent structures within high-dimensional psychological data, improving predictive accuracy in behavioral sciences.

The results contribute to interdisciplinary research at the intersection of mathematics, economics, and social sciences. The findings provide valuable insights into how locally structured systems can be effectively managed and optimized in various applied domains.

Keywords: controlled random fields, local interactions, optimal strategies.

Матеріал надійшов 01.03.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)