

НЕЛІНІЙНЕ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ ПРИ ХВИЛЬОВИХ ЧИСЛАХ, БЛИЗЬКИХ ДО КРИТИЧНОГО, В ДВОШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ СКІНЧЕНОЇ ГЛИБИНИ

Розглянуто задачу про поширення слабконелінійних хвильових пакетів у двошаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном — шар з кришкою». Для дослідження та аналізу використано метод багатомасштабних розвинень (МБР) до третього порядку, що дає можливість отримати перші наближення досліджуваної моделі, які є лінійними відносно неведомих функцій, що є доданками у відповідних розкладах. У результаті вдається отримати еволюційне рівняння обвідної хвильових пакетів у формі нелінійного рівняння Шредінгера. Коли частота центру хвильового пакету близька до нуля, отримані з МБР результати не можуть бути використані для моделювання хвильових рухів у досліджуваній системі. В статті розглянуто граничний випадок поширення хвильових пакетів при навіколокритичних хвильових числах. На основі дисперсійного співвідношення та умов розв'язуваності другого та третього наближень встановлено, що поширення хвильових пакетів при хвильових числах, близьких до критичного, описується нелінійним рівнянням Шредінгера. Отримане рівняння містить першу похідну за просторовою координатою та дві похідні за часовою координатою і може бути поширеним на всі хвильові числа. Також виведено співвідношення між хвильовим числом та малим параметром.

Ключові слова: внутрішні хвилі, нелінійне рівняння Шредінгера, хвильове число.

Вступ

Використання асимптотичних методів до задач дослідження поширення хвильових пакетів є одним із найпоширеніших способів математичного моделювання хвильових рухів у рідинах. Зокрема, застосування методу багатомасштабних розвинень (МБР) до слабконелінійних задач такого класу призводить до аналізу послідовних наближень, які є лінійними відносно неведомих функцій — доданків відповідних асимптотичних розкладів.

У дослідженні [1] проведено аналітичне моделювання поширення хвильових пакетів у двошаровій гідродинамічній системі «півпростір — півпростір». За допомогою МБР отримано перші три наближення. Виведено дисперсійне співвідношення та умови розв'язуваності другого та третього наближень. Отримано еволюційне рівняння обвідної хвильових пакетів у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ). Проведено аналіз модуляційної стійкості хвильових пакетів.

Роботи [2] та [3] присвячені аналізу поширення слабконелінійних хвильових пакетів у гідродинамічній системі «півпростір — шар з твердою кришкою». Зокрема, отримано еволюційне рівняння обвідної, проаналізовано форму хвильових пакетів, досліджено питання модуляцій-

ної стійкості.

У статтях [5] та [6] досліджено математичну модель хвильових рухів у гідродинамічній системі «шар з твердим дном — шар з кришкою». Отримано рівняння для обвідної хвильового пакета у формі НРШ. Проаналізовано характерні особливості поширення хвильових пакетів.

З використанням МБР у роботах [7], [8] та [9] проаналізовано питання поширення слабконелінійних хвильових пакетів у гідродинамічних системах «шар з твердим дном — шар — шар з вільною поверхнею», «півпростір — шар — шар з твердою кришкою», «шар з твердим дном — шар — шар з твердою кришкою». Отримано еволюційні рівняння обвідної хвильових пакетів у формі НРШ, проведено аналіз характеристик поширення хвиль. У вказаних роботах було проведено детальний аналіз хвильових рухів. Зазначимо, що у випадку малих частот, коли $\omega \rightarrow 0$, результати, отримані у вказаних роботах, не можуть бути застосовані для математичного моделювання хвильових рухів. Цей випадок розглянуто у [1] для моделі «півпростір — півпростір» та у [4] для моделі «півпростір — шар з твердою кришкою».

У запропонованому дослідженні ми розглянемо поширення хвильових пакетів при значенні хвильових чисел, близьких до критичного, для гідродинамічної системи «шар з твердим

дном — шар з кришкою».

Поширення хвильових пакетів у двошаровій гідродинамічній системі скінченної глибини

Розглянемо задачу про поширення двовимірних хвильових пакетів кінцевої амплітуди на поверхні контакту $\eta(x, t)$ рідких шарів $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < +\infty, -h_1 < z < 0\}$ та $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < +\infty, 0 < z < h_2\}$. Враховується сила поверхневого натягу T , сила тяжіння направлена перпендикулярно до поверхні розподілу у від'ємному z -напрямку, рідини вважаються нестисливими. Швидкості у Ω_i виражені через градієнти потенціалів $\phi_i(x, z, t)$. Математична постановка задачі в безрозмірному вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_j &= 0 \quad \text{in } \Omega_j, \\ \eta_{,t} - \phi_{j,z} &= -\alpha\eta_{,x}\phi_{j,x} \quad \text{при } z = \alpha\eta(x, t), \\ \phi_{1,t} - \rho\phi_{2,t} + (\Gamma\rho)\eta + 0.5\alpha(\nabla\phi_1)^2 - 0.5\alpha\rho(\nabla\phi_2)^2 - \\ &- T\left(1 + (\alpha\eta_{,x})^2\right)^{-3/2}\eta_{,xx} = 0 \quad \text{при } z = \alpha\eta(x, t), \\ \phi_{1,z} &= 0 \quad \text{при } z = -h_1, \\ \phi_{2,z} &= 0 \quad \text{при } z = h_2, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\rho = \rho_2/\rho_1$, $\rho_i (i = 1, 2)$ — густини шарів Ω_i , $\alpha = a/l$ — параметр нелінійності, a — максимальне відхилення поверхні контакту $\eta(x, t)$, l — довжина хвилі.

Розв'язки задачі (1) можна шукати, використовуючи метод багатомасштабних розв'язків. Представимо невідомі функції $\eta(x, t)$ та $\phi_i(x, z, t)$ у вигляді

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_n + O(\alpha^3), \\ \phi_j(x, z, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \phi_{jn} + O(\alpha^3), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\eta_n = \eta_n(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2)$ та $\phi_{jn} = \phi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2)$ — відповідні доданки в асимптотичних розкладах ($n = 1, 2, 3$), $x_j = \alpha^j x$ та $t_j = \alpha^j t$ — масштабні змінні ($j = 0, 1, 2$).

Підставивши (2) у задачу (1), отримаємо перші три лінійні наближення відносно невідомих функцій η_n та ϕ_{jn} . Ці проблеми мають складний аналітичний вигляд, тому тут їх наводити не будемо. Зазначимо, що в результаті аналізу вказаних наближень було знайдено дисперсійне співвідношення та умови розв'язуваності другого та третього наближень, на основі яких можна отримати еволюційне рівняння обвідної у вигляді НРШ.

У роботі [5] було отримано дисперсійне співвідношення

$$\omega^2 = \frac{k^- \rho k + T k^3}{\coth(kh_1) + \rho \coth(kh_2)}, \quad (3)$$

де ω — частота центру хвильового пакета, k — хвильове число. Умову розв'язуваності для другого наближення можна записати у вигляді

$$W_{11}A_{,t_1} + W_{12}A_{,x_1} = 0, \quad (4)$$

де A — обвідна хвильового пакета, W_{11} та W_{12} — коефіцієнти, які мають громіздкий аналітичний вигляд та залежать від параметрів (h_1, h_2, T, ρ, k) . Умову розв'язуваності для третього наближення можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} W_{21}A_{,t_2} + W_{22}A_{,t_2} + W_{23}A_{,t_1x_1} + \\ W_{24}A_{,x_1x_1} + W_{25}A_{,t_1t_1} = W_{26}A^2\bar{A} \end{aligned} \quad (5)$$

де W_{2i} ($i = 1, 6$) — коефіцієнти, які мають громіздкий аналітичний вигляд та залежать від параметрів (h_1, h_2, T, ρ, k) .

Зазначимо, що у випадку $\omega \rightarrow 0$, коли $\omega' \rightarrow \infty$, розв'язання, що отримані у [5; 6] для випадку широкого спектра частот, не можуть бути застосовані. Для розгляду цього граничного випадку перепишемо умову (4) у вигляді

$$k'A_{,t_1} + A_{,x_1} = 0, \quad (6)$$

де $k' = dk/d\omega$, отримана з (3) і має вигляд

$$\begin{aligned} k' &= 2\omega (\coth(kh_1) + \rho \coth(kh_2))^2 \times \\ &\times \{Tk^3[h_1(\coth^2(kh_1)-1) + \rho h_2(\coth^2(kh_2)-1)] + \\ &+ 3Tk^2[\coth(kh_1) + \rho \coth(kh_2)] + k(1-\rho)[h_1 + \\ &+ \rho h_2 - h_1 \coth^2(kh_1) - \rho h_2 \coth^2(kh_2)] - \\ &- (1-\rho)[\coth(kh_1) - \rho \coth(kh_2)]\}^{-1}. \end{aligned}$$

Продиференціюємо (6) спочатку за x_1 , а потім за t_1 . Отримаємо

$$k'A_{,t_1x_1} + A_{,x_1x_1} = 0, \quad k'A_{,t_1t_1} + A_{,x_1t_1} = 0. \quad (7)$$

Остаточно з (7) маємо

$$A_{,x_1x_1} = -k'A_{,t_1t_1}, \quad A_{,x_1x_1} = (k')^2 A_{,t_1t_1}. \quad (8)$$

Тоді, використовуючи (6), (8) та умову розв'язуваності (5), отримаємо шукане еволюційне рівняння у вигляді нелінійного рівняння Шредінгера

$$A_{,x} + k'A_{,t} - 0.5ik''A_{,tt} = 2i\alpha^2 J_0 A^2 \bar{A}, \quad (9)$$

де $k'' = d^2k/d\omega^2$. Вираз для k'' має складний аналітичний вигляд, тому тут його не наводимо. Рівняння (9) має розв'язок, який залежить лише від часу

$$A = 0.5a \exp(i\sigma t + \text{const}t), \quad (10)$$

де a — деяка стала. Підставимо (10) у (9), отримаємо рівняння відносно σ :

$$0.5k''\sigma^2 - k'\sigma + 2\alpha^2 a^2 J_0 = 0. \quad (11)$$

З (11) отримаємо

$$\sigma_{1,2} = \frac{k' \mp \sqrt{(k')^2 - 2\alpha^2 a^2 J_0}}{k''}. \quad (12)$$

Якщо $\omega \rightarrow 0$, тоді отримаємо, що

$$\begin{aligned} k' &\rightarrow \frac{\omega(\coth(kh_1) + \rho \coth(kh_2))}{Tk^2}, \\ k'' &\rightarrow \frac{(\coth(kh_1) + \rho \coth(kh_2))}{Tk^2}, \\ J_0 &\rightarrow \frac{3k^3}{32}. \end{aligned} \quad (13)$$

Враховуючи (13), вираз (11) для σ можна переписати у такому вигляді

$$\sigma = \omega \mp \left(\omega^2 - \frac{3\alpha^2 a^2 k^5 T}{8(\coth(kh_1) + \rho \coth(kh_2))} \right)^{0.5}.$$

Отже, вираз для σ набуває дійсних значень, якщо

$$\omega^2 \geq \frac{3\alpha^2 a^2 k^5 T}{8(\coth(kh_1) + \rho \coth(kh_2))}. \quad (14)$$

З умови (14) та дисперсійного співвідношення (3) отримаємо зв'язок між хвильовим числом k та нелінійним параметром α , що відповідає критичній частоті:

$$3\alpha^2 a^2 k^4 - 8k^2 - 8\frac{1-\rho}{T} = 0,$$

звідки хвильове число визначається за формулою

$$k = \frac{4 \mp 4\sqrt{1 - \frac{3\alpha^2 a^2 (1-\rho)}{2T}}}{3\alpha^2 a^2}. \quad (15)$$

Отриманий результат (15) повністю узгоджується з дослідженнями, проведеними в [1] і [5]. Зазначимо, що з (15) можна отримати розв'язання хвильового числа k за малим параметром α .

Висновки та перспективи подальших досліджень

У роботі розглянуто задачу про поширення слабконелінійних хвильових пакетів у двошаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном — шар з кришкою» з використанням методу багатомасштабних розв'язань. Розглянуто граничний випадок поширення хвильових пакетів при навіколокритичних хвильових числах. У цьому випадку, частота центру хвильового пакета близька до нуля, і розв'язання, отримані методом багатьох масштабів, не можуть бути застосовані для моделювання хвильових рухів. В результаті встановлено, що поширення хвильових пакетів при хвильових числах, близьких до критичного, описується нелінійним рівнянням Шредінгера, що містить першу похідну за просторовою координатою та дві похідні за часовою координатою і яке може бути поширеним на всі хвильові числа. Отримано співвідношення між хвильовим числом та малим параметром. У подальшому планується дослідити поняття модуляційної стійкості (стійкості Бенджаміна — Фейра) для випадку хвильових чисел, близьких до критичного.

Список літератури

1. Nayfeh A. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface. *Trans. ASME, Ser. E: J. Appl. Mech.* 1976. Vol. 43 (4). Pp. 584–588.
2. Selezov I., Avramenko O. Some features of nonlinear wave trains propagating in two-layer fluid. *Geophysical Research Abstracts*. 2001. Vol. 3. Pp. 25–30.
3. Selezov I., Avramenko O., Kharif C., and Trulsen K. High-order evolution equation for nonlinear wavepacket propagation with surface tension accounting. *Comptes Rendus. Mecanique*. 2003. Vol. 331 (3). Pp. 197–201.
4. Selezov I. T., Avramenko O. V. Nonlinear Propagation of Wave Packets for Near-Critical Wave Numbers in a Liquid that Is Piecewise Nonuniform with Depth. *Journal of Mathematical Sciences*. 2001. Vol. 103. Pp. 409–413.
5. Gurtoviy Yu. V., Selezov I. T., Avramenko O. V. Features of wave-packet propagation in two-layer fluid of finite depth. *International Journal of Fluid Mechanics Research*. 2007. Vol. 34 (5). Pp. 475–491.
6. Гуртовий Ю. В., Селезов І. Т., Авраменко О. В. Нелінійна стійкість поширення хвильових пакетів в двошаровій рідині. *Прикладна гідромеханіка*. 2006. № 90 (8). С. 60–65.
7. Avramenko O. V., Naradovyi V. V., Selezov I. T. Conditions of wave propagation in a two-layer liquid with free surface. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 212. Pp. 131–141.
8. Avramenko O., Lunyova M., Naradovyi V. Wave propagation in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system with a rigid lid. *Eastern-European journal of enterprise technologies*. 2017. Vol. 5 (5). Pp. 58–66.
9. Naradovyi V. V., Kharchenko D. S. Modulation stability of wave-packets in a three-layer fluid. *Mathematical Modeling and Computing*. 2023. Vol. 10 (4). Pp. 1292–1302.

References

1. A. Nayfeh, Trans. ASME, Ser. E: J. Appl. Mech. **43** (4), 584–588 (1976).
2. I. Selezov and O. Avramenko, Geophysical Research Abstracts. **3**, 25–30 (2001).
3. I. Selezov, O. Avramenko, C. Kharif, and K. Trulsen, Comptes Rendus. Mecanique. **331** (3), 197–201 (2003).
4. I. T. Selezov and O. V. Avramenko, Journal of Mathematical Sciences. **103**, 409–413 (2001).
5. Yu. V. Gurtovy, I. T. Selezov, and O. V. Avramenko, International Journal of Fluid Mechanics Research. **34** (5), 475–491 (2007).
6. Yu. V. Hurtovy, Y. T. Selezov, and O. V. Avramenko, Prykladna hidromekhanika. **90** (8), 60–65 (2006).
7. O. V. Avramenko, V. V. Naradovyi, and I. T. Selezov, Journal of Mathematical Sciences. **212**, 131–141 (2016).
8. O. Avramenko, M. Lunyova, and V. Naradovyi, Eastern-European journal of enterprise technologies. **5** (5), 58–66 (2017).
9. V. V. Naradovyi and D. S. Kharchenko, Mathematical Modeling and Computing. **10** (4), 1292–1302 (2023).

V. Naradovyi

NONLINEAR PROPAGATION OF WAVE PACKETS AT WAVE NUMBERS CLOSE TO THE CRITICAL ONE IN A TWO-LAYER HYDRODYNAMIC SYSTEM OF FINITE DEPTH

The problem of the propagation of weakly nonlinear wave packets in a two-layer hydrodynamic system, «layer with a solid bottom — layer with a lid,» is considered. The method of multiple-scale expansions (MSE) up to the third order is employed for investigation and analysis. This method allows one to obtain the first approximations of the studied model, which are linear with respect to the unknown functions that are the terms in the respective expansions. As a result, the evolution equation for the wave packet envelope is derived in the form of a nonlinear Schrödinger equation. When the central frequency of the wave packet is close to zero, the results obtained using MSE cannot be applied to model wave motions in the studied system. The article examines the limiting case of wave packet propagation at near-critical wave numbers. Based on the dispersion relation and solvability conditions for the second and third approximations, it is established that the propagation of wave packets at wave numbers close to the critical one is described by the nonlinear Schrödinger equation. The derived equation includes the first spatial derivative and two temporal derivatives and can be extended to all wave numbers. Additionally, a relation between the wave number and the small parameter is derived.

Keywords: internal waves, nonlinear Schrödinger equation, wave number.

Матеріал надійшов 28.12.2024



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)