

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ ПОШУКУ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ ВІДОБРАЖЕННЯ В ПРОСТОРАХ БАГАТОВИМІРНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

У статті розглянуто задачу пошуку нерухомої точки для відображень у просторах багатовимірних послідовностей. Автори формують і доводять основну теорему, що забезпечує існування та єдиність розв'язку рівняння типу $\bar{x} = \bar{h} + A\bar{x}$, де A є лінійним оператором у просторі Банаха з певними властивостями. В роботі введено систему півнорм, яка узгоджується з нормою простору та задовольняє умови монотонності й обмеженості. Використовуючи метод послідовних наближень та аналіз збіжності відповідного ряду, доведено існування розв'язку задачі, а також отримано оцінки для норми розв'язку. Особливу увагу приділено доведенню обмеженості оператора та унікальності розв'язку, що гарантує коректність постановки задачі. Запропоновані результати є розвитком класичних підходів до задачі нерухомих точок у новому контексті багатовимірних послідовностей, що мають як теоретичну, так і прикладну цінність.

Ключові слова: нерухома точка, лінійні оператори, норма, півнорма.

Вступ

Проблема існування та єдиності нерухомих точок відображень є фундаментальною у функціональному аналізі й має широке коло застосувань у теорії динамічних систем, стохастичних процесів, оптимальному керуванні та обчислювальній математиці. Класичні результати, починаючи від робіт Банаха [1], сформували основу сучасної теорії нерухомих точок і стали ключовими для розв'язання нелінійних рівнянь, задач оптимізації та аналізу ітераційних методів. Подальший розвиток цієї тематики відображено у фундаментальних монографіях Dugundji та Granas [2], а також у працях Kelley [3], де викладено топологічні засади, необхідні для формулювання та доведення узагальнених теорем про нерухомі точки.

Додатковий імпульс дослідженням надали роботи, присвячені аналізу нескінченних матриць і просторів послідовностей [4], які створили передумови для розширення теорії на багатовимірні та структуровані простори. Ці підходи виявилися особливо корисними у задачах дискретизації рівнянь математичної фізики, що призводять до багатовимірних різницевих аналогів диференціальних рівнянь. Отримані рівняння мають багато спільного з тими, що розглядалися у відомій монографії Бріллюена та Пароді [5], присвяченій поширенню хвиль у періодичних структурах, зокрема у кристалічних ґратках.

Початково дослідження фокусувалися на

процесах поширення хвиль тиску, теплових хвиль та дифузії у неоднорідних середовищах. Подальший розвиток обчислювальних можливостей електронно-обчислювальних машин дав змогу вирішувати складні обернені задачі сейсміки, радіолокації, томографії. Точність цих задач істотно залежить від розмірності простору: що більша розмірність, то точнішими є результати. При цьому внутрішня структура розріджених матриць у великих системах дозволяла робити висновки щодо їх розв'язності.

Однак нове коло задач, зокрема у сфері штучного інтелекту, пов'язане з необхідністю роботи із заповненими матрицями, що оперують векторами з мільйонами координат. Це зумовлює актуальність нових підходів, основаних на внутрішніх властивостях відображень, які не потребують застосування традиційних метричних характеристик, як-от стискування.

У цій роботі досліджується задача пошуку нерухомої точки у просторах багатовимірних послідовностей із застосуванням системи півнорм, узгодженої з нормою простору Банаха, але стискування не передбачається. Запропонований результат є іншим підходом, ніж метод стискаючих відображень.

Основний результат

Теорема. Нехай B — простір Банаха, $\|\cdot\|_B$ — норма в ньому, A — лінійний оператор в B . Нехай також $\|\cdot\|_n$, $n \in \mathbb{Z}$, — зліченна система півнорм в B , що має властивості монотонно-

сті й обмеженості:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\|_n &\leq \|\bar{x}\|_{n+1}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{x}\|_n &= \|\bar{x}\|_B; \end{aligned} \quad \forall \bar{x} \in B. \quad (1)$$

Нехай також знайдеться така додатна послідовність чисел $\{\alpha(l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$, що $\alpha = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha(l) < \infty$ і для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і кожного елемента $\bar{x} \in B$ виконується нерівність

$$\|A\bar{x}\|_n \leq \sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l) \|\bar{x}\|_l. \quad (2)$$

Тоді оператор A — обмежений, для будь-якого $\bar{h} \in B$ рівняння

$$\bar{x} = \bar{h} + A\bar{x} \quad (3)$$

має єдиний розв'язок у просторі B , і для нього виконується оцінка

$$\|\bar{x}\|_n \leq e^{\sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Доведення. I. Покажемо що оператор A обмежений. Використовуючи обмеженість півнорм і переходячи до границі у нерівності (1) за n , отримаємо

$$\|A\bar{x}\|_B \leq \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha(l) \|\bar{x}\|_l \leq \alpha \|\bar{x}\|_B. \quad (5)$$

II. Доведемо існування розв'язку рівняння (3). Для цього скористаємося методом послідовних наближень. Нехай початкове наближення $\bar{x}(0) = \bar{h}$, тоді збіжність ітераційного процесу $\bar{x}(k) = \bar{h} + A\bar{x}(k-1)$ еквівалентна збіжності ряду

$$\bar{x} = \bar{h} + A\bar{h} + A^2\bar{h} + \dots + A^k\bar{h} + \dots \quad (6)$$

Оцінимо елементи ряду (6). Покажемо, що

$$\|A^k\bar{x}\|_n \leq \|\bar{h}\|_n \frac{\left(\sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l)\right)^k}{k!}. \quad (7)$$

Доведення нерівності (7) проведемо методом математичної індукції за індексом k . Нехай $k = 1$, тоді з монотонності півнорм (1) і умови (2) теореми для всіх $\bar{h} \in B$ отримуємо

$$\|A\bar{h}\|_n \leq \sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l) \|\bar{h}\|_l \leq \|\bar{h}\|_n \sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l).$$

Припустимо, що нерівність правильна для

деякого k . Доведемо її для $k+1$ члена ряду:

$$\begin{aligned} \|A^{k+1}\bar{h}\|_n &\leq \sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l) \|A^k\bar{h}\|_l \\ &\leq \|\bar{h}\|_n \sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l) \frac{\left(\sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l)\right)^k}{k!}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для зручності введемо позначення

$$F(l) = \sum_{l=-\infty}^n \alpha(l),$$

тоді права частина нерівності (8) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\|\bar{h}\|_n}{k!} \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l) - F(l-1))(F(l-1))^k \\ = \frac{\|\bar{h}\|_n}{k!} \left(\sum_{l=-\infty}^{n-1} F(l)(F(l-1))^k \right. \\ \left. - \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l-1))^{k+1} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Скористаємося відомою нерівністю, що використовується при доведенні нерівності Гельдера:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (10)$$

де $a, b, p, q > 0$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Покладемо $p = k+1$, $q = \frac{k+1}{k}$ і застосуємо (10) до кожного доданку першої з сум (9). Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\|\bar{h}\|_n}{k!} \left(\sum_{l=-\infty}^{n-1} F(l)(F(l-1))^k \right. \\ \left. - \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l-1))^{k+1} \right) \\ \leq \frac{\|\bar{h}\|_n}{k!} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l))^{k+1} \right. \\ \left. + \frac{k}{k+1} \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l-1))^{k+1} \right. \\ \left. - \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l-1))^{k+1} \right) \\ \leq \frac{\|\bar{h}\|_n}{(k+1)!} \left(\sum_{l=-\infty}^{n-1} F(l)^{k+1} \right. \\ \left. - \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l-1))^{k+1} \right) \end{aligned}$$

$$= \|\bar{h}\|_n \frac{(F(n-1))^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Отже, нерівність (7) доведено,

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\|_n &= \left\| \bar{h} + \sum_{k=1}^{\infty} A^k \bar{h} \right\|_n \\ &\leq \|\bar{h}\|_n \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F(n-1))^k}{k!} \right) \\ &= \|\bar{h}\|_n e^{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha(l)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

тобто ряд збігається. Його сума є розв'язком рівняння (3). Для розв'язку рівняння (3) виконується оцінка (4).

Покажемо, що інших розв'язків немає, від супротивного. Припустимо, що розв'язків два $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$. Тоді їхня різниця задовольняє однорідному рівнянню

$$\bar{x} = A\bar{x}.$$

Покажемо, що за виконання умов теореми це рівняння має лише тривіальний розв'язок. За умовою теореми послідовність $\{\alpha(l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$ сумується абсолютно. Отже, для кожного $\varepsilon \in [0; 1]$ знайдеться такий номер m , що

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^m \alpha(l) &= \varepsilon < 1 \\ \|\bar{x}\|_m &\leq \sum_{l=-\infty}^{m-1} \alpha(l) \|\bar{x}\|_l \leq \varepsilon \|\bar{x}\|_m. \end{aligned}$$

Звідси $\|\bar{x}\|_m = 0$ і внаслідок монотонності піднорм для всіх $l < m$ виконується $\|\bar{x}\|_l = 0$. З рекурентних нерівностей (2) випливає, що $\|\bar{x}\|_B = 0$, а отже, $\bar{x} = 0$.

Теорему доведено.

Висновки

У статті досліджено задачу пошуку нерухомої точки відображення в просторах багатовимірних послідовностей. Показано, що для широкого класу відображень, які задовольняють умови компактності та неперервності, існують достатні умови розв'язності задачі. Використання ітераційних методів дозволяє не лише довести факт існування нерухомої точки, а й побудувати ефективну процедуру її відшукування.

Отримані результати є ще одним конструктивним підходом до розв'язання задач про пошук нерухомої точки відображень. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення запропонованих підходів для відображень у просторах зі змінною структурою, а також на вивчення задач із додатковими обмеженнями, що мають прикладне значення у математичному моделюванні.

Подяки

This work was partly supported by a grant from the Simons Foundation International [SFI-PD-Ukraine-00014577, O.G.]

Список літератури

1. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*. 1922. No. 3 (1). Pp. 133–181.
2. Dugundji J., Granas A. Fixed Point Theory. New York: Springer, 2003.
3. Kelley J. L. General Topology. New York: Springer, 1975.
4. Cooke R. G. Infinite Matrices and Sequence Spaces. Dover Publications Inc., 1955.
5. Brillouin L., Parodi M. Propagation des ondes dans les milieux périodiques. Paris: Masson et Dunod, 1956.

References

1. S. Banach, *Fundamenta Mathematicae*. **3** (1), 133–181 (1922).
2. J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory* (Springer, New York, 2003).
3. J. L. Kelley, *General Topology* (Springer, New York, 1975).
4. R. G. Cooke, *Infinite Matrices and Sequence Spaces* (Dover Publications Inc., 1955).
5. L. Brillouin and M. Parodi, *Propagation des ondes dans les milieux périodiques* (Masson et Dunod, Paris, 1956).

ON THE SOLVABILITY OF THE FIXED POINT PROBLEM FOR MAPPINGS IN SPACES OF MULTIDIMENSIONAL SEQUENCES

The article addresses the problem of finding fixed points for mappings in spaces of multidimensional sequences. The authors formulate and prove a fundamental theorem establishing the existence and uniqueness of a solution to the equation of the form $\bar{x} = \bar{h} + A\bar{x}$, where A is a linear operator acting in a Banach space endowed with a countable system of seminorms. These seminorms are consistent with the norm of the space and satisfy monotonicity and boundedness conditions.

By applying the method of successive approximations, the convergence of the corresponding iterative process is analyzed. The study demonstrates that the infinite series arising from the iterative scheme converges, providing an explicit representation of the solution. Furthermore, norm estimates for the solution are derived, showing that the operator under consideration is bounded. The uniqueness of the solution is rigorously established by proving that the associated homogeneous equation admits only the trivial solution under the stated assumptions.

The results presented in this paper extend the classical fixed-point theory into the framework of multidimensional sequence spaces, thereby contributing both to the theory of functional analysis and to applications. In particular, the developed approach is relevant for the study of discrete and continuous dynamical systems, the analysis of stochastic processes, and the design of models in optimal control theory, where identifying stationary states plays a central role.

Overall, the article provides a mathematically rigorous foundation for addressing solvability questions in spaces with complex structures. It enriches the theoretical toolbox available for researchers working on applied problems involving high-dimensional or structured state spaces, thereby opening perspectives for further studies in modern analysis and its applications.

Keywords: fixed point, linear operators, norm, seminorm.

Матеріал надійшов 25.09.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)