

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Досліджуються достатні умови показників λ_n та коефіцієнтів Фур'є, при виконанні яких майже періодичні функції $f(t)$ з простору Безиковича $\mathbb{B}^2$ неперервні, неперервно-диференційовні та голоморфні.

У випадку показників λ_n , що мають степеневу асимптотику $\lambda_n = L(n^\alpha + \varepsilon_n)$, де $L \in \mathbb{R}^1$, $\alpha > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ отримано аналог теореми Соболева про вкладення.

Для показників λ_n , що за $n \rightarrow +\infty$ зростають повільніше довільного додатного степеня n , описано клас функцій з простору Безиковича $\mathbb{B}^2$, що мають аналітичне продовження у півплощину $\operatorname{Re} s > a \geq 0$. До таких функцій належить дзета-функція Рімана $\zeta(s)$.

Для функцій з $\mathbb{B}^2$, у яких показники λ_n прямують до нуля, встановлені достатні умови аналітичного продовження до цілих функцій 1-го експоненціального порядку.

Ключові слова: майже періодична, Бор, простір Безиковича, дзета-функція Рімана, ряд Фур'є, ряд Діріхле, голоморфність.

Якщо $h(t)$ — сума двох неперервних періодичних функцій $f(t)$ і $g(t)$ з неспіврозмірними періодами p і q , то $h(t)$ вже не періодична. Разом з тим у деякому розумінні $h(t)$ лишається близькою до періодичної, або, як прийнято говорити, майже періодичною функцією.

За теоремою Кронекера [16], для довільного $\delta > 0$, для неспіврозмірних чисел p і q існує безліч пар натуральних чисел m і n , таких, що $|mp - nq| < \delta$. Звідси випливає, що число

$$\tau = \frac{1}{2}(mp + nq)$$

є для $h(t)$ так званим майже періодом, тобто

$$|h(t + \tau) - h(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1.$$

Число $\varepsilon > 0$ в цій оцінці можна зробити як завгодно малим завдяки вибору малого $\delta > 0$ та неперервності функцій $f(t)$ і $g(t)$.

Основи теорії майже періодичних функцій закладено в монографіях Г. Бора [2], Безиковича [1], Б. Левітана [16] та інших. Оскільки простори таких функцій несепарабельні, то їхні властивості суттєво складніші за відповідні властивості періодичних функцій [10; 13]. З сучасним станом теорії майже періодичних функцій можна ознайомитись в оглядах [3; 6; 21].

У цій роботі вивчаються достатні умови, при виконанні яких гладкі відносно оператора диференціювання майже періодичні функції з простору Безиковича $\mathbb{B}^2$ є майже періодичними за Бором або аналітичними майже періодичними функціями. Деяко близькі питання розглядались в [20].

© Каши́ровський О. І., Митник Ю. В., 2025

Нагадаємо, що за означенням Г. Бора неперервна на $\mathbb{R}^1$ функція $f(t)$ рівномірно майже періодична, якщо для довільного додатного $\varepsilon > 0$ існує число $l = l(\varepsilon)$, таке, що в кожному інтервалі $(a, a + l)$ існує хоча б одне число τ , таке, що

$$|f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1.$$

Число τ називають ε майже періодом функції $f(t)$. Надалі такі функції будемо називати майже періодичними за Бором. З цього означення випливає, що майже періодичні функції за Бором обмежені та рівномірно неперервні на $\mathbb{R}^1$.

Для визначення більш широкого класу майже періодичних функцій, а саме простору Безиковича $\mathbb{B}^2$ [9] розглянемо множину Λ всіх можливих скінченних лінійних комбінацій $f(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k t}$ уявних експонент

$$e^{i\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}^1 \quad (1)$$

де $a_k \in \mathbb{C}^1$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^1$, $n \in \mathbb{N}$.

Для функцій $f, g \in \Lambda$ визначимо скалярний добуток

$$(f, g)_{\mathbb{B}^2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (2)$$

Простір Безиковича $\mathbb{B}^2$ є поповненням Λ відносно скалярного добутку (2). Простір $\mathbb{B}^2$ є несепарабельним гільбертовим простором. Функції з $\mathbb{B}^2$ будемо надалі називати майже періодичними за Безиковичем.

Система функцій (1) утворює в просторі $\mathbb{B}^2$ континуальний ортонормований базис, оскільки для всіх $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^1$ таких, що $\lambda \neq \mu$

$$\begin{aligned}
 (e^{i\lambda t}, e^{i\mu t})_{\mathbb{B}^2} &= \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i\lambda t} e^{-i\mu t} dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i(\lambda-\mu)t} dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{i(\lambda-\mu)} \cdot \\
 &\quad \cdot \left(e^{i(\lambda-\mu)T} - e^{-i(\lambda-\mu)T} \right) = \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\sin((\lambda-\mu)T)}{(\lambda-\mu)T} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.
 \end{aligned}$$

Відповідно при $\lambda = \mu$ маємо

$$\begin{aligned}
 (e^{i\lambda t}, e^{i\mu t})_{\mathbb{B}^2} &= \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i\lambda t} e^{i\lambda t} dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt = 1.
 \end{aligned}$$

Таким чином:

$$(e^{i\lambda t}, e^{i\mu t})_{\mathbb{B}^2} = \delta_{\lambda\mu} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \lambda \neq \mu, \\ 1, & \text{якщо } \lambda = \mu. \end{cases}$$

Кожна функція $f(t) \in \mathbb{B}^2$ розкладається у ряд Фур'є за функціями $e^{i\lambda t}$ із системи (1)

$$f(t) = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}^1} a_{\lambda} e^{i\lambda t}, \quad a_{\lambda} = a_{\lambda}(f) = (f, e^{i\lambda t})_{\mathbb{B}^2}.$$

Для кожної функції $f \in \mathbb{B}^2$ у цьому ряді не більш ніж зліченна кількість доданків. Отже, ряд (1) для кожної функції з $\mathbb{B}^2$ має вигляд

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{i\lambda_k t}, \quad (3)$$

де $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — деяка послідовність попарно різних дійсних чисел $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 < +\infty$.

Для того, щоб функція $f(t)$ була майже періодичною за Бором, достатньо, щоб її ряд Фур'є (3) збігався абсолютно.

На многовиді Λ визначимо диференціальний оператор

$$\tilde{A} = i \frac{d}{dt}.$$

Покажемо, що цей оператор симетричний на Λ . Нехай $f(t)$ і $g(t)$ довільні функції з Λ . Тоді, проінтегрувавши частинами, отримаємо

$$\begin{aligned}
 &\int_{-T}^T \left(i \frac{d}{dt} f(t) \right) \overline{g(t)} dt = \\
 &= i \int_{-T}^T f'(t) \overline{g(t)} dt = \\
 &= \Delta(f, g, T) - i \int_{-T}^T f(t) \overline{g'(t)} dt = \\
 &= \Delta(f, g, T) + \int_{-T}^T f(t) \overline{i g'(t)} dt,
 \end{aligned}$$

$$\text{де } \Delta(f, g, T) = i(f(T)\overline{g(T)} - f(-T)\overline{g(-T)}).$$

Оскільки уявні експоненти $e^{i\lambda t}$ мають одиничні модулі, то з нерівності Коші–Буняковського отримаємо:

$$\begin{aligned}
 |\Delta(f, g, T)| &= 2 \max_{t \in \mathbb{R}^1} |f(t) \overline{g(t)}| = \\
 &= \max_{t \in \mathbb{R}^1} \left| \left(\sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k t} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k e^{i\lambda_k t} \right) \right| \leq \\
 &\leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \|f\|_{\mathbb{B}^2} \cdot \|g\|_{\mathbb{B}^2}.
 \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \Delta(f, g, T) = 0,$$

а отже, і симетричність оператора $\tilde{A}$, тобто $(\tilde{A}f, g)_{\mathbb{B}^2} = (f, \tilde{A}g)_{\mathbb{B}^2}$.

Оскільки експоненти (3) — власні функції оператора $\tilde{A}$ (тобто $\tilde{A}e^{i\lambda t} = \lambda e^{i\lambda t}$, для кожного $\lambda \in \mathbb{R}^1$), оператор $\tilde{A}$ допускає самоспряжене розширення A , для якого область визначення $D(A)$ складається з усіх функцій $f(t)$ із простору $\mathbb{B}^2$, для яких коефіцієнти a_k розкладу в ряд Фур'є задовольняють умову

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 \cdot |a_k|^2 < +\infty. \quad (4)$$

Звідси випливає, що для $m \in \mathbb{N}$ належність $f \in \mathbb{B}^2$ до $D(A^m)$ означає

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^{2m} \cdot |a_k|^2 < +\infty. \quad (5)$$

Виділимо в просторі Безиковича $\mathbb{B}^2$ сепарабельний підпростір T -періодичних функцій $f(t)$, для яких $f(t+T) = f(t)$, де $T > 0$ — фіксоване число. Цей підпростір можна ототожнити з сепарабельним гільбертовим простором $L_2(0, T)$, оскільки скалярний добуток (2) на T -періодичних функціях збігається зі скалярним добутком у $L_2(0, T)$

$$(f, g)_{L_2(0, T)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Звуження A_T оператора A на $L_2(0, T)$ має ортонормований власний базис

$$\left\{ e^{\frac{2\pi i n t}{T}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} : A_T e^{\frac{2\pi i n t}{T}} = i \frac{d}{dx} e^{\frac{2\pi i n t}{T}} = -\frac{2\pi}{T} n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}.$$

Область визначення $D(A_T)$ збігається з частиною простору Соболева $W_2^1[0, T]$ [4] зі скалярним добутком

$$(f, g)_{W_2^1[0, T]} = (f, g)_{L_2[0, T]} + (f', g')_{L_2[0, T]};$$

$D(A_T)$ утворює в просторі Соболева $W_2^1[0, T]$ замкнений підпростір корозмірності 1. Згідно з теоремою про вкладення [11] функції $D(A_T) \subset W_2^1[0, T]$ абсолютно неперервні.

Наступна теорема узагальнює теорему Соболева про вкладення на функції $f \in \mathbb{B}^2$, для яких послідовність показників $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ має степеневу асимптотику

$$|\lambda_n| = Ln^\alpha(1 + \varepsilon_n), \quad L, \alpha > 0. \quad (6)$$

Теорема 1. Якщо показники $\lambda_n, n \in \mathbb{Z}$ функції $f(t)$ мають за $n \rightarrow +\infty$ асимптотику (6) і $f \in D(A^m)$, $m > \frac{1}{2\alpha}$, то ряд Фур'є функції $f(t)$ є рівномірно збіжним, а $f(t)$ є майже періодичною за Бором.

Доведення. Оцінимо зверху залишок ряду Фур'є

$$r_N(f, t) = \sum_{|n| > N} a_n e^{-i\lambda_n t}$$

для функції $f \in D(A^m)$ за допомогою нерівності Коші—Буняковського:

$$\begin{aligned} |r_N(f, t)| &\leq \\ &\leq \left(\sum_{|n| > N} \lambda_n^{2m} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{|n| > N} \frac{1}{\lambda_n^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|A^m f\|_{\mathbb{B}^2} \cdot \left(\sum_{|n| > N} \frac{1}{\lambda_n^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Сума

$$\sum_{|n| > N}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2m}}$$

прямує до нуля за $N \rightarrow +\infty$, оскільки внаслідок (6) її можна оцінити зверху залишком суми збіжного ряду

$$C \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha m}},$$

константа C залежить від m, L, α та $\max_{n \in \mathbb{Z}} |\varepsilon_n|$,

$$2\alpha m > 2\alpha \cdot \frac{1}{2\alpha} = 1.$$

Таким чином, ряд Фур'є функції $f(t)$ є рівномірно і абсолютно збіжним на $\mathbb{R}^1$, а отже функція $f(t)$ є майже періодичною за Бором. Теорему доведено.

Для ілюстрації доведеної теореми розглянемо функцію

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{6}{5}}} e^{-in^{\frac{1}{6}} t}.$$

Ця функція майже періодична за Безиковичем, оскільки

$$\|f\|_{\mathbb{B}^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{6}{5}}} \right)^2 = \zeta\left(\frac{12}{5}\right) < +\infty.$$

$f(t)$ майже періодична за Бором, оскільки вона оцінюється зверху збіжним рядом

$$|f(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{6}{5}}} = \zeta\left(\frac{6}{5}\right) < +\infty.$$

Показники $\lambda_n = n^{\frac{1}{6}}$ мають за $n \rightarrow +\infty$ асимптотику (6) з параметрами $\alpha = \frac{1}{6}$, $L = 1$, $\varepsilon_n = 0$. Визначимо, за яких m $f \in D(A^m)$.

$$\|f\|_{\mathbb{B}^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{m}{6}} \frac{1}{n^{\frac{6}{5}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{m}{3} - \frac{12}{5}}.$$

Цей ряд є збіжним, якщо $\frac{m}{3} - \frac{12}{5} < -1$. Звідси отримаємо $0 < m < \frac{21}{5}$.

Оскільки

$$\frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{6}} = 3 < \frac{21}{5},$$

то для $f(t)$ справедлива теорема 1 за $m = 4$.

Доведена теорема буде також справедливою і для функцій, майже періодичних за Безиковичем, якщо послідовність модулів їхніх показників $|\lambda_n|$ зростає за $|n| \rightarrow +\infty$ швидше, ніж довільний додатний степінь $|n|$. Так, за показників

$$\lambda_n = Lq^n(1 + \varepsilon_n), \quad (7)$$

де $n \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $L \in \mathbb{R}^1$, $L \neq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$ для $f \in D(A)$ маємо

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n q^n|^2 < +\infty, \quad |a_n| < C q^{-n}$$

за деякого $C > 0$. Звідси випливає абсолютна збіжність ряду Фур'є такої функції та відповідно її майже періодичність за Бором.

Для вказаних показників типу (7) ряд Фур'є

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{i\lambda_n t}$$

рівномірно збігається до майже періодичної за Бором функції, яка неперервна, але недиференційована функцією, як і відома функція Веєрштрасса [19]

$$w(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n e^{iq^n t},$$

де $q > 1 > a > q^{-1}$.

Розглянемо майже періодичні функції з $\mathbb{B}^2$, у яких послідовність показників λ_n прямує до нескінченності повільніше будь-якого додатного степеня n . Належність такої функції до перетину

$$\bigcap_{m=1}^{+\infty} D(A^m)$$

областей визначення всіх натуральних степенів оператора A не є достатньою умовою її неперервності. Необхідною (але не достатньою) умовою майже періодичності за Бором є аналітичність цієї функції відносно оператора A в $\mathbb{B}^2$, тобто збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|A^n f\| \sigma^n < +\infty$$

за деякого додатного σ [7; 12; 14] й існування аналітичного продовження в комплексну площину.

Обмежимося розглядом майже періодичних функцій $f(s)$, $s = \sigma + it$, аналітичних у деякій півплощині $\sigma \geq \sigma_0$. Нагадаємо, що голоморфну в півплощині $\sigma \geq \sigma_0$ функцію $f(s)$ називають аналітичною майже періодичною функцією [16], якщо для довільного додатного $\varepsilon > 0$ існує таке $l(\varepsilon)$, що в кожному інтервалі $(a, a + l(\varepsilon))$, $a \in \mathbb{R}^1$ існує хоча б одне число τ , таке, що

$$|f(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon$$

для усіх s із півплощини $\operatorname{Re} s = \sigma \geq \sigma_0$. Відповідно, за кожного фіксованого $\sigma \geq \sigma_0$ функція

$f(\sigma + it)$ майже періодична за Бором за змінною t . До того ж число τ — майже період одночасно для всіх $\sigma \geq \sigma_0$.

Для аналітичних у півплощині $\operatorname{Re} s \geq \sigma_0$ майже періодичних функцій розглядають розвинення в ряд Діріхле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n (it + \sigma)},$$

де λ_n — монотонно зростаюча послідовність додатних чисел.

За кожного фіксованого $\sigma \geq \sigma_0$ ряд Діріхле можливо переформатувати в ряд Фур'є функції $f(\sigma + it)$:

$$f(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\sigma) e^{i\lambda_n t}, \quad b_n(\sigma) = a_n e^{-\lambda_n \sigma}.$$

Для послідовності показників $\lambda_n = \ln n$ ряди Діріхле

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-s \ln n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\sigma} \cdot n^{-it}$$

збігаються до аналітичної майже періодичної функції $f(s)$ у півплощині $\operatorname{Re} s \geq \sigma_0$, якщо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}}$$

збігається абсолютно.

До таких функцій відносять дзета-функцію Рімана [18]:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Її ряд Діріхле абсолютно збігається у відкритій півплощині $\operatorname{Re} s > 1$. Отже, $\zeta(s)$ — аналітична майже періодична функція в замкнутих півплощинах $\operatorname{Re} s \geq 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

За $\operatorname{Re} s = \sigma \in (\frac{1}{2}, 1]$, функція $\zeta(s)$ майже періодична за Безиковичем за змінною $t = \operatorname{Im} s$, оскільки ряд квадратів модулів коефіцієнтів Фур'є за $\sigma > \frac{1}{2}$ збіжний:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}} = \zeta(2\sigma) < +\infty.$$

Оскільки в точці $s = 1$ функція Рімана має полюс 1-го порядку [18], то для дослідження $\zeta(s)$ за $0 < \sigma \leq 1$ Л. Ойлер помножив $\zeta(s)$ на цілу періодичну функцію $\eta(s) = 1 - 2^{1-s}$. Оскільки $\eta(1) = 0$, для добутку $\tilde{\zeta}(s) = \eta(s)\zeta(s)$ точка

$s = 1$ виявилася регулярною точкою. Ряд Діріхле для $\tilde{\zeta}(s)$ має вигляд:

$$\tilde{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}. \quad (8)$$

Цей ряд абсолютно збіжний за $\sigma > 1$. Покажемо, що (8) умовно збіжний за $0 < \sigma \leq 1$. За $s = 1$ й $0 < \sigma \leq 1$ маємо збіжний знакозмінний ряд Лейбніца. Зробимо в ряді (8) перегрупування

$$\tilde{\zeta}(s) = - \sum_{k=1}^{+\infty} ((2k)^{-s} - (2k-1)^{-s}). \quad (9)$$

Доданками в ряді (9) є різниці Δ_k значень комплекснозначної функції u^{-s} дійсної змінної u в точках $u = 2k$ і $u = 2k-1$, $k = 1, +\infty$.

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} (u^{-s}) &= -su^{-s-1} = \\ &= -su^{-\sigma-1} (\cos(t \ln u) - i \sin(t \ln u)), \end{aligned}$$

то, застосувавши до дійсних та уявних частин цих різниць теорему Лагранжа, отримаємо для них оцінки:

$$|\Delta_k| \leq 2|s| \cdot k^{-\sigma-1}. \quad (10)$$

Оскільки $\sigma + 1 > 1$, то ряд (9) абсолютно збіжний за $\sigma > 0$, а ряд (8) умовно збіжний за $0 < \sigma \leq 1$. За $0 < \sigma \leq 1$ ряди (8) і (9) збігаються в смугі $0 < \sigma \leq 1$ нерівномірно, тому що множник $|s|$ в оцінці (10) необмежений, але збіжність рядів (8) й (9) рівномірна на компактних підмножинах смуги $0 < \sigma \leq 1$. Звідси випливає, що в смугі $0 < \sigma \leq 1$ функції $\zeta(s)$ і $\tilde{\zeta}(s)$ не майже періодичні за Бором, проте вони голоморфні у цій смугі.

У наступній теоремі властивості $\tilde{\zeta}(s)$ узагальнені на досить широкий клас голоморфних майже періодичних функцій.

Теорема 2. Для довільної строго монотонно зростаючої послідовності додатних чисел $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\lambda_n \rightarrow +\infty$ ряд Діріхле

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n s} \quad (11)$$

умовно збігається у півплощині $\operatorname{Re} s > 0$ до голоморфної функції $\varphi(s)$. Ця збіжність рівномірна в секторах

$$|\arg(s - \varepsilon)| \leq \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Крім того:

а) Якщо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} = \alpha > 0,$$

то за $\sigma > \frac{1}{2\alpha}$ функція $\varphi(\sigma + it)$ за змінною t майже періодична за Безиковичем. А в півплощинах $\sigma > \frac{1}{\alpha} + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ ряд (11) збігається абсолютно й рівномірно, а $\varphi(s)$ — аналітична майже періодична функція.

б) Якщо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} = +\infty,$$

то для будь-якого $\varepsilon > 0$ ряд (11) збігається абсолютно й рівномірно в півплощині $\sigma > \varepsilon$. У цій півплощині $\varphi(s)$ є аналітичною майже періодичною функцією.

в) Якщо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} = 0,$$

то для усіх s , таких, що $\sigma > 0$, ряд (11) є розбіжним абсолютно, і за кожного $\sigma > 0$ функція $\varphi(\sigma + it)$ не є майже періодичною за Безиковичем.

Доведення. За $s = \varepsilon$, ε довільне мале додатне число, ряд (11)

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n \varepsilon}$$

є альтернуючим рядом Лейбніца, а отже є умовно збіжним. Тоді за узагальненням теореми Абеля на випадок рядів Діріхле [17] ряд (11) умовно збігається в півплощині $\operatorname{Re} s > 0$. У кожному секторі

$$|\arg(s - \varepsilon)| \leq \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

збіжність є рівномірною.

Враховуючи, що $\varepsilon > 0$ довільне, маємо умовну збіжність у півплощині $\operatorname{Re} s > 0$.

Для доведення пунктів а)–в) оцінимо модулі доданків $e^{-\lambda_n s}$ ряду (11) й дослідимо його на абсолютну збіжність і збіжність суми квадратів його модулів.

У випадку а) для достатньо великих n

$$\begin{aligned} \lambda_n &> (\alpha - \varepsilon) \ln n, \quad \varepsilon > 0, \\ |e^{-\lambda_n s}| &\leq e^{-\sigma(\alpha - \varepsilon) \ln n} = n^{-\sigma(\alpha - \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Тоді за $\sigma > \frac{1}{2\alpha}$ й достатньо малого $\varepsilon > 0$, й деякого $C > 0$

$$|e^{-\lambda_n s}| \leq C n^{-\sigma(\alpha - \varepsilon)} \leq C n^{-\frac{1}{2} - \varepsilon_1},$$

де $\varepsilon_1 > 0$. Звідси випливає збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |e^{-\lambda_n s}|^2 < +\infty.$$

Отже, за $\sigma > \frac{1}{2\alpha}$ функція $\varphi(\sigma + it)$ є майже періодичною за Безиковичем за змінною t . Аналогічно, за $\sigma > \frac{1}{\alpha}$ отримаємо:

$$|e^{-\lambda_n s}| \leq C n^{-1-\varepsilon_1}.$$

Тоді в півплощині $\sigma > \frac{1}{\alpha}$ ряд (11) абсолютно збіжний, у півплощинах $\sigma > \frac{1}{2\alpha} + \varepsilon$ збіжність рівномірна, а $\varphi(s)$ — аналітична майже періодична функцією.

У випадку б) за великих n і довільного $M > 0$

$$\lambda_n > M \ln n.$$

Тоді для $\sigma < \varepsilon$, де ε — як завгодно мале додатне число, будемо мати

$$|e^{-\lambda_n s}| < C n^{-1-\varepsilon_1}$$

за деяких додатних $C > 0$ і $\varepsilon_1 > 0$.

Тоді ряд (11) абсолютно збіжний у півплощині $\sigma > 0$. До того ж для будь-якого $\varepsilon > 0$ у півплощинах $\sigma > \varepsilon$ збіжність рівномірна, а $\varphi(s)$ — аналітична майже періодична функція.

У пункті в) навпаки за великих n і довільних малих $\varepsilon > 0$ маємо

$$\lambda_n < \varepsilon \ln n.$$

Звідси випливає, що за довільних $\sigma > 0$, існують додатні константи C і $\varepsilon_1 > 0$, такі, що

$$|e^{-\lambda_n s}| \geq C n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_1}.$$

Звідси випливає абсолютна розбіжність ряду (11) у півплощині $\operatorname{Re} s > 0$, а також розбіжність суми квадратів модулів членів ряду (11). Отже, за жодного $\sigma > 0$ функція $\varphi(s)$ не майже періодична за Безиковичем. Теорему доведено.

У розглянутих раніше закладах майже періодичні за Безиковичем функції є голоморфними або мероморфними. Так, $\zeta(s)$ має один простий полюс [18]:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \zeta_0(s),$$

де $\zeta_0(s)$ — ціла функція від s . Похідні

$$\zeta^{(m)}(s) = \frac{(-1)^m m!}{(s-1)^{m+1}} + \zeta_0^{(m)}(s), \quad m \in \mathbb{N}$$

мають у точці $\sigma = 1$ полюс $m + 1$ -го порядку. Розвинення в ряд Діріхле для $\zeta^{(m)}(s)$ має вигляд

$$\zeta^{(m)}(s) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^m}{n^s}.$$

З цього розвинення випливає, що за всіх натуральних m і $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ похідні $\zeta^{(m)}(s)$ є майже періодичними за Безиковичем, а за $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ аналітичними майже періодичними функціями. Така властивість, очевидно, зберігається й за зсуву аргументу вздовж уявної вісі, тобто для функцій $\zeta(s - ia)$ і $\zeta^{(m)}(s - ia)$, $a \in \mathbb{R}^1$.

Нехай $\{t_j\}_{j=0,+\infty}$ — послідовність попарно різних дійсних чисел, яка скрізь щільна в $\mathbb{R}^1$. Розглянемо ряд з функціями $\zeta(s - t_j)$

$$\Phi(s) = \sum_{j=0}^{+\infty} 3^{-j} \zeta(s - it_j), \quad (12)$$

якому відповідає ряд Діріхле

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} k(n) \cdot n^{-s}, \quad \text{де } k(n) = \sum_{j=0}^{\infty} 3^{-j} \cdot n^{it_j}.$$

Оскільки $\sum_{j=1}^{+\infty} 3^{-j} = \frac{1}{2}$, то

$$\frac{1}{2} \leq |k(n)| \leq \frac{3}{2}$$

для усіх натуральних n . Звідси випливає збіжність за нормою $\mathbb{B}^2$ ряду (12) за $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ і абсолютна збіжність за $\operatorname{Re} s > 1$.

У смузі $\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < 1$ і півплощині $\operatorname{Re} s > 1$ сума ряду $\Phi(s)$ — голоморфна функція. Оскільки в точках $1 - it_j$ функції $\zeta(s - it_j)$ мають простий полюс і точки $1 - it_j$ утворюють на прямій $\operatorname{Re} s = 1$ скрізь щільну множину, то за наближення значень s до цієї прямої значення $\Phi(s)$ необмежено зростають:

$$\lim_{\sigma \rightarrow +1} \Phi(\sigma + it) = \infty.$$

Звідси випливає, що за підходу до прямої $\operatorname{Re} s = 1$ функція $\Phi(s)$ має границю в класі узагальнених функцій [5]. Внаслідок цього, на всій прямій $\operatorname{Re} s = 1$ функція $\Phi(1 + it)$ є узагальненою сингулярною функцією, оскільки не має жодної точки неперервності. Отже, ми отримали узагальнену сингулярну функцію, яка одночасно майже періодична за Безиковичем. Похідні $\Phi^{(m)}(1 + it)$, $m \in \mathbb{N}$ у сенсі теорії узагальнених функцій [8] також будуть належати до $\mathbb{B}^2$.

Іншого типу цікаві явища маємо за дослідженні майже періодичних функцій з показниками λ_n , які монотонно прямують до нуля. За

великих n уявні експоненти $e^{i\lambda_n t}$ системи (1) мають асимптоти

$$e^{i\lambda_n t} = 1 + \varepsilon_n(t), \text{ де}$$

$$\varepsilon_n(t) = i\lambda_n t + O((\lambda_n t)^2).$$

Оскільки послідовність $\varepsilon_n(t)$ прямує до нуля рівномірно за $t \in [-A, A]$ за кожного $A > 0$, то на цих інтервалах ряди Фур'є

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$$

будуть збігатися або розбігатися одночасно із числовим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Якщо показники λ_n функції $f \in \mathbb{B}^2$ монотонно прямують до нуля, то й усі її похідні $f^{(m)}, m \in \mathbb{N}$ також належать до $\mathbb{B}^2$, причому ряди Фур'є для похідних

$$f^{(m)}(t) = i^m \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n^m e^{i\lambda_n t}$$

збігаються швидше, ніж ряд Фур'є самої $f(t)$. У той же час ряд Фур'є первісної від f

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n^{-1} e^{i\lambda_n t}$$

збігається повільніше, ніж її ряд Фур'є.

Так, наприклад, за $\lambda_n = \frac{1}{n}$ майже періодична за Безиковичем функція

$$h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{it}{n}}$$

за $t = 0$ має розбіжний ряд Фур'є, оскільки утворений з її коефіцієнтів числовий ряд є гармонійним рядом

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Виявляється, що ряди Фур'є похідних

$$h^{(m)}(t) = i^m \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{m+1}} e^{\frac{it}{n}}$$

збігаються абсолютно на усій дійсній осі. Збіжність є рівномірною на компактах з $\mathbb{R}^{\mathbb{K}}$.

Оскільки

$$h^{(m)}(0) = i^m \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{m+1}} = i^m \zeta(m+1)$$

$$1 < \zeta(m+1) < \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2,$$

то $h'(t)$ має аналітичне продовження в комплексну площину до цілої функції першого порядку і має розвинення в ряд Тейлора

$$h'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^m \zeta(m+1)}{(m-1)!} s^{m-1}$$

в околі точки $s = 0$ з нескінченним радіусом збіжності.

Звідси випливає, що й сама функція має аналітичне продовження до цілої функції першого порядку [15; 17], ряд Тейлора якої має вигляд

$$h(s) = h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^m \zeta(m+1)}{m!} s^m,$$

де значення $h(0)$ невідоме.

У наступному твердженні описано достатньо широкий клас функцій типу $h(t)$.

Теорема 3. *Якщо для функції $f \in \mathbb{B}^2$ показники λ_n функції монотонно прямують до нуля й мають за великих n степеневу асимптотику*

$$\lambda_n = L n^{-\alpha} (1 + \varepsilon_n), \quad (13)$$

де $\alpha > 0$, L відмінна від нуля дійсна константа, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ за $n \rightarrow +\infty$, то функція f має аналітичне продовження до цілої функції першого порядку.

Доведення. Для функції $f \in \mathbb{B}^2$ з показниками λ_n , що задовольняють асимптотиці (13), за

$$m > \frac{1}{2\alpha} \quad (14)$$

ряди Фур'є, що відповідають похідним

$$f^{(m)}(x) = i^m \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n^m e^{-i\lambda_n x}$$

є абсолютно збіжними, оскільки з нерівності Коші-Буняковського будемо мати

$$\begin{aligned} & \left| i^m \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n^m e^{-i\lambda_n x} \right| \leq \\ & \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq CL^m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha m}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_{\mathbb{B}^2} = \\ & = CL^m (\zeta(2\alpha m))^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_{\mathbb{B}^2}, \end{aligned}$$

де $C > 0$ — деяка константа. Отже, функція $f(x)$ нескінченно диференційовна й за $m > \frac{1}{2\alpha}$ її похідні $f^{(m)}(x)$ рівномірно обмежені геометричною прогресією відносно m : $|f^{(m)}| < C_1 L^m$. Звідси випливає, що $f^{(m_0)}(x)$ (m_0 — найменше значення m , для якого виконується (14)) має аналітичне продовження до цілої функції першого порядку [15; 17]. У такому разі сама функція $f(x)$ також буде цілою функцією першого порядку. Теорему доведено.

Якщо показники λ_n функції $f \in \mathbb{B}^2$ монотонно прямує до нуля повільніше $n^{-\alpha}$ для усіх $\alpha > 0$, тобто $0 < \lambda_n < Cn^{-\alpha}$, де $C > 0$ залежить від α , то ряди Фур'є для $f(t)$ й для усіх її похідних можуть розбігатися. Таке має місце, наприклад, за $\lambda_n = \frac{1}{\ln n}$, $n \geq 2$, для функції

$$f(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{\frac{it}{\ln n}}}{\sqrt{n \ln n}}.$$

Цей ряд Фур'є та ряди Фур'є усіх похідних

$$f^{(m)}(t) = i^m \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{\frac{it}{\ln n}}}{\sqrt{n}(\ln n)^{m+1}}$$

розбіжні.

Наостанок наведемо приклади майже періодичних функцій двох змінних, які подібні роз-

глянутій перед теоремою 3 цілій функції $h(s)$ і дзета-функції Рімана $\zeta(s)$:

$$\mu(s_1, s_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{s_1}{n}}}{n^{s_2}}, \quad (15)$$

$$\tilde{\mu}(s_1, s_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{\frac{s_1}{n}}}{n^{s_2}}. \quad (16)$$

Ряди (15) і (16) збігаються абсолютно за $\operatorname{Re} s_1 \geq 0$ і $\operatorname{Re} s_2 > 1$, причому $\mu(0, s_2) = \zeta(s_2)$, $\tilde{\mu}(0, s_2) = \tilde{\zeta}(s_2)$, $\mu(s_1, 1) = h(s_1)$.

За $\operatorname{Re} s_1 \geq 0$ і $0 < \operatorname{Re} s_2 \leq 1$ ряд (16) збігається умовно. Оскільки $(s-1)\zeta(s)$, $\tilde{\zeta}(s)$ і $h(s)$ цілі функції, то $(s-1)\mu(s_1, s_2)$ і $\tilde{\mu}(s_1, s_2)$ — цілі функції двох змінних. Ці функції задовольняють диференціальному рівнянню з частинною похідною за змінною s_1 та зсувом за аргументом s_2 :

$$\frac{\partial u(s_1, s_2)}{\partial s_1} = u(s_1, s_2 + 1).$$

Автори висловлюють щире подяку члену-кореспонденту НАН України А.Н. Кочубею за корисні зауваження і поради.

Список літератури

1. Besicovitch A., Bohr H. Almost periodicity and generalized trigonometric series. *Acta Mathematica*. 1931. No. 57. Pp. 203–291.
2. Bohr H. Zur theorie der fastperiodischen funktionen i. *Acta Mathematica*. 1925. No. 45. Pp. 29–127.
3. Wei-Shih Du, Kostic' M., Pinto M. Almost periodic functions and their applications: A survey of results and perspectives. *Hindawi Journal of Mathematics*. 2021. Article ID 5536018:21. <https://doi.org/10.1155/2021/5536018>.
4. Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L. Boundary value problems for operator differential equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht etc., 1991.
5. Kothe G. Die randwerte einer analytischen funktionen. *Mathematische Zeitschrift*. 1952. No. 57. S. 13–33.
6. Lassoued Dhaou. Almost periodic and quasi-periodic functions. a brief survey and some applications. *Surveys in Mathematics and its Applications*. 2024. No. 19. Pp. 79–107. URL: <https://www.utgjiu.ro/math/sma>.
7. Nelson E.. Analytic vectors. *Annals of Mathematics*. 1959. No. 70. Pp. 572–615.
8. Schwartz L. Théorie des distributions à valeurs vectorielles. *Annales de l'Institut Fourier*. 1957. No. 7. Pp. 1–141.
9. Akhiezer N. I., Glazman I. M. Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Moscow : Nauka, 1966.
10. Bari N. K. Trigonometric Series. Moscow : Fizmatgiz, 1961.
11. Berezansky Yu. M. Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators. Kiev : Naukova Dumka, 1965.
12. Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L. On the approximation of smooth vectors of a closed operator by entire vectors of exponential type. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1995. No. 47 (5). Pp. 616–628.
13. Edwards R. Fourier Series: A Modern Introduction. Vol. 1. Moscow : Mir Publishers, 1985.
14. Kashpirovskiy O. I., Mytnyk Yu. V. Approximation of solutions of operator-differential equations by operator polynomials. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1998. No. 50 (11). Pp. 1506–1516.
15. Levin B. Ya. Distribution of Zeros of Entire Functions. Moscow : GITTL, 1956.
16. Levitan B. M. Almost Periodic Functions. Moscow : GITTL, 1953.
17. Leont'ev A. F. Entire Functions. Series of Exponents. Moscow : Nauka, 1983.
18. Titchmarsh E. C. The Theory of the Riemann Zeta-Function. Moscow : Foreign Literature Publishing House, 1953.
19. Fikhtengol'ts G. M. Course in Differential and Integral Calculus. Vol. 2. Moscow : FIZMATLIT, 2003.
20. Khasanov Yu. Kh. On the embedding conditions of Besicovitch almost periodic function classes. *Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2021. No. 23 (1). Pp. 88–99. <https://doi.org/10.46698/b5144-7328-6245-w>.
21. Shubin M. A.. Almost periodic functions and partial differential operators. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*. 1978. No. 33 (2). Pp. 3–47. URL: <https://www.mathnet.ru/rm3388>.

References

1. A. Besicovitch and H. Bohr, *Acta Mathematica*. **57**, 203–291 (1931).
2. H. Bohr, *Acta Mathematica*. **45**, 29–127 (1925).
3. Wei-Shih Du, M. Kostic', and M. Pinto, *Hindawi Journal of Mathematics*, Article ID 5536018:21 (2021). <https://doi.org/10.1155/2021/5536018>.
4. V. I. Gorbachuk and M. L. Gorbachuk, *Boundary value problems for operator differential equations* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht etc., 1991).
5. G. Kothe, *Mathematische Zeitschrift*. **57**, 13–33 (1952).
6. Dhaou Lassoued, *Surveys in Mathematics and its Applications*. **19**, 79–107 (2024). <https://www.utgjiu.ro/math/sma>.
7. E. Nelson, *Annals of Mathematics*. **70**, 572–615 (1959).
8. L. Schwartz, *Annales de l'Institut Fourier*. **7**, 1–141 (1957).
9. N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of Linear operators in Hilbert Space* (Nauka, Moscow, 1966).
10. N. K. Bari, *Trigonometric Series* (Fizmatgiz, Moscow, 1961).
11. Yu. M. Berezansky, *Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators* (Naukova Dumka, Kiev, 1965).
12. V. I. Gorbachuk and M. L. Gorbachuk, *Ukrainian Mathematical Journal*. **47** (5), 616–628 (1995).
13. R. Edwards, *Fourier Series: A Modern Introduction*. Vol. 1 (Mir Publishers, Moscow, 1985).
14. O. I. Kashpirovskiy and Yu. V. Mytnyk, *Ukrainian Mathematical Journal*. **50** (11), 1506–1516 (1998).
15. B. Ya. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions* (GITTL, Moscow, 1956).
16. B. M. Levitan, *Almost Periodic Functions* (GITTL, Moscow, 1953).
17. A. F. Leont'ev, *Entire Functions. Series of Exponents* (Nauka, Moscow, 1983).
18. E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function* (Foreign Literature Publishing House, Moscow, 1953).
19. G. M. Fikhtengol'ts, *Course in Differential and Integral Calculus*. Vol. 2 (FIZMATLIT, Moscow, 2003).
20. Yu. Kh. Khasanov, *Vladikavkaz Mathematical Journal*. **23** (1), 88–99 (2021). <https://doi.org/10.46698/b5144-7328-6245-w>.
21. M. A. Shubin, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*. **33** (2), 3–47 (1978). URL: <https://www.mathnet.ru/rm3388>.

O. Kashpirovskiy, Yu. Mytnyk

ON SOME PROPERTIES OF ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

This paper explores conditions for exponents λ_n and coefficients of Fourier series which, if satisfied, guarantee that the almost periodic function $f(t)$ from Besikovich space $\mathbb{B}^2$ is continuous, smooth and holomorphic.

For those exponents λ_n with polynomial asymptotics, $\lambda_n = L(n^\alpha + \varepsilon_n)$, where $L \in \mathbb{R}^1$, $\alpha > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$ the alternative for Sobolev embedding theorem is derived.

The paper also describes class of functions that can be analytically continued to half-plane $\operatorname{Re} s > a \geq 0$ from Besikovich space $\mathbb{B}^2$ with exponents λ_n which grow slower than n^c for arbitrary $c > 0$ as $n \rightarrow +\infty$. This class also includes Riemann zeta function $\zeta(s)$.

For functions from $\mathbb{B}^2$ with $\lambda_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$ sufficient conditions required to analytically continued them to entire functions of exponential first order.

Keywords: almost periodicity, Bohr, Besikovich space, Riemann zeta function, Fourier series, Dirichle series, holomorphness.

Матеріал надійшов 19.09.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)