

СПЕКТРАЛЬНІ ВІДНОВЛЮВАЛЬНІ ЧИСЛА ГРАФІВ

 $C_3 + e$ ТА $K_4 - e$

У статті досліджено обернену спектральну задачу для зважених графів. Розглянуто проблему відновлення додатних ваг ребер графа за спектрами його індукованих підграфів. Основну увагу приділено знаходженню точного значення спектрального відновлювального числа $Srn(G)$ для графів $Srn(C_3 + e)$ та $Srn(K_4 - e)$ — мінімальної кількості спектрів індукованих підграфів, необхідних для однозначного відновлення всіх ваг ребер графа.

Отримані результати завершують визначення спектральних відновлювальних чисел для всіх зв'язних графів порядку не більш як чотири. Вони можуть бути використані для подальших досліджень обернених спектральних задач та розробки алгоритмів відновлення ваг на ребрах графів.

Ключові слова: спектр графа, власні числа, обернені спектральні задачі, зважений граф.

Вступ

Спектральна теорія графів є сучасним напрямом математики, що поєднує алгебраїчні, комбінаторні та геометричні методи для вивчення структурних властивостей графів (див. [1]). Її активний розвиток зумовлений широким колом застосувань у різних галузях науки — від хімії, фізики та біології до інформатики, економіки й соціальних наук (див. [2]–[4]). Спектральні характеристики графів використовуються, зокрема, у задачах розпізнавання структур, кластеризації даних, аналізу мережевої динаміки та моделювання складних систем, у машинному навчанні для покращення роботи згорткових нейронних мереж (див. [3]).

Важливою складовою спектральної теорії є обернені спектральні задачі, які передбачають відновлення структури або параметрів графа на основі спектральної інформації. Зокрема, ці задачі можна формулювати як відновлення матриці суміжності (або ваг ребер) за спектрами самої матриці чи її підматриць (див. [5]–[8]). З оглядом обернених спектральних задач можна ознайомитися за роботою [7].

Особливий інтерес становлять *обернені задачі для зважених графів*, де на множині ребер задано додатну функцію ваг. У статті [10] було вперше введено поняття *спектрального відновлювального числа графа* $Srn(G)$, а також отримано точні значення цього числа для деяких класів графів, зокрема для ланцюга ($Srn(A_n) = 2$ при $n \geq 3$) та зірки ($Srn(K_{1,n}) = n$). У роботі [11] знайдено значення цього числа для циклів C_3 ($Srn(C_3) = 3$) та C_4 ($Srn(C_4) = 4$), у статті [12] — для графа K_4 ($Srn(K_4) = 6$).

Дослідження [13], [14] надали верхні оцін-

ки $Srn(G)$ для дерев та уніциклічних графів через кількість висячих вершин. Проте навіть для графів невеликого порядку точне визначення $Srn(G)$ залишається складною задачею через її нелінійний характер і високу чутливість цього параметра до структури графа.

Метою цієї роботи є знаходження точних значень спектрального відновлювального числа для графів $C_3 + e$ (paw graph) та $K_4 - e$ (diamond graph). Використані методи ґрунтуються на узагальненій теоремі Захса та аналізі характеристикних многочленів індукованих підграфів.

Отримані результати можуть стати основою для подальших досліджень, спрямованих на визначення $Srn(G)$ для ширших класів графів.

Основні означення та твердження

У цій статті під терміном *граф* розуміємо впорядковану пару $G = (V, E)$, де V — непорожня множина вершин, а E — довільна підмножина множини всіх неупорядкованих пар різних елементів з V .

Надалі використовуємо такі позначення: $E(G)$ — множина ребер графа G , $V(G)$ — множина його вершин, (u, v) — ребро, що сполучає вершини u і v . Кількість вершин графа називають його порядком. У цій роботі розглядаємо лише графи скінченного порядку.

Означення 1. *Зваженим графом* $\mathbf{G}$ називають впорядковану пару (G, w) , де G — граф, а $w : E \rightarrow (0, +\infty)$ — вагова функція, яка кожному ребру $e \in E$ ставить у відповідність додатне число $w(e)$.

Зважений граф $\mathbf{G}$ зручно зображати у вигляді діаграми графа G , приписуючи над ко-

жним ребром e його вагу $w(e)$. У подальшому слово «зважений» часто опускатимемо, якщо з контексту зрозуміло, що йдеться саме про зважений граф.

З кожним графом $\mathbf{G} = (G, w)$ та нумерацією його вершин натуральними числами від 1 до n , де n — порядок графа, пов'язують матрицю суміжності $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, елементи якої визначаються за правилом (через w_{ij} позначається значення ваги ребра (i, j)):

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{якщо вершини } i \text{ та } j \text{ суміжні,} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Означення 2. Спектром графа $\mathbf{G}$ називають мультимножину власних значень його матриці суміжності. Позначають як $\sigma(\mathbf{G})$.

Зауважимо, що спектр зваженого графа не залежить від нумерації вершин i є його інваріантом.

Для характеристичного многочлена графа $\mathbf{G}$ будемо використовувати позначення $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \det(\lambda I - A(\mathbf{G}))$.

Для формулювання узагальненої теореми Захса введемо необхідні означення та позначення (див. [9], [13]).

Лінійним підграфом графа G називають підграф, компоненти зв'язності якого є лише пари суміжних вершин (разом із ребром, що їх з'єднує) та прості цикли. Позначимо його через H_k , де k — кількість вершин у цьому підграфі.

Під вагою компоненти зв'язності, що є парою суміжних вершин $\{i, j\}$, розуміємо w_{ij}^2 , а під вагою компоненти, що є простим циклом, — добуток значень w_{ij} по всіх ребрах циклу (i, j) .

Введемо позначення: $r(H_k)$ — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа H_k ; $c(H_k)$ — кількість компонент, що є циклами; $w(H_k)$ — вага H_k , тобто добуток ваг усіх його компонент.

Теорема 1 (Узагальнена теорема Захса, див. теорему 2.5.2. в [13]). Нехай

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^{n-k} = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_n$$

— характеристичний многочлен графа

$\mathbf{G} = (G, w)$. Тоді виконуються рівності:

$$1. \ c_1 = 0;$$

$$2. \ c_2 = - \sum_{e \in E(G)} w(e)^2;$$

$$3. \ c_k = \sum_{\{H_k\}} (-1)^{r(H_k)} 2^{c(H_k)} w(H_k), \quad \text{для } k = 1, \dots, n,$$

де сума береться по всіх лінійних підграфах H_k графа G .

Нагадаємо, що *індукований підграф* графа G — це підграф, утворений підмножиною вершин графа G разом з усіма ребрами, що сполучають ці вершини.

Означення 3. Зважений граф $\mathbf{G}_1 = (G_1, w_1)$ називають *індукованим підграфом* зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$, якщо G_1 є індукованим підграфом G , і для будь-якого ребра $e \in E(G_1)$ виконується рівність $w_1(e) = w(e)$.

Розглянемо таку обернену спектральну задачу для зважених графів. Нехай задано граф G і потрібно однозначно відновити вагову функцію w зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ за спектрами певних його індукованих підграфів. Інакше кажучи, необхідно, щоб за значеннями спектрів вибраних підграфів ваги на ребрах графа G визначалися однозначно для будь-якої вагової функції w . Спектр індукованого підграфа називатимемо *підспектром*.

Зауважимо, що задача відновлення ваг за спектрами підграфів еквівалентна задачі відновлення за характеристичними многочленами цих підграфів, оскільки за спектром зваженого графа однозначно відновлюється його характеристичний многочлен і навпаки.

Означення 4. Спектральне відновлювальне число $Srn(G)$ — це мінімальна кількість індукованих підграфів G , таких, що за спектрами відповідних зважених індукованих підграфів можна однозначно відновити вагову функцію зваженого графа $\mathbf{G}$.

Обернена спектральна задача для графа $\mathbf{C}_3 + e$

Дослідимо задачу відновлення ваг для графа $\mathbf{C}_3 + e$ та доведемо таку теорему.

Теорема 2. $Srn(\mathbf{C}_3 + e) = 3$.

Доведення. Для зручності як множину вершин оберемо множину $\{1, 2, 3, 4\}$ та позначимо ваги на ребрах графа через a_1, a_2, a_3, a_4 згідно з рис.1.

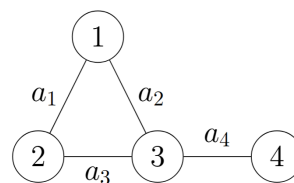


Рис. 1. Зважений граф $\mathbf{C}_3 + e$

Спочатку вкажемо трійку індукованих підграфів, за спектрами яких можна однозначно визначити всі ваги ребер графа $\mathbf{C}_3 + e$ для будь-

якої вагової функції w :

$$C_3 + e, A_3, A_2.$$

Через A_3 позначено індукований підграф із множиною вершин $\{1, 2, 3\}$, а через A_2 — індукований підграф із множиною вершин $\{1, 2\}$.

За узагальненою теоремою Захса (Теорема 1) характеристичні многочлени графа $C + e$ та його вибраних індукованих підграфів мають такий вигляд:

$$P_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - a_1^2;$$

$$P_{A_3}(\lambda) = \lambda^3 - (a_2^2 + a_4^2)\lambda;$$

$$P_{C_3+e}(\lambda) = \lambda^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)\lambda^2 - 2a_1a_2a_3\lambda + a_1^2a_4^2.$$

Тоді ми можемо послідовно відновити значення усіх ваг a_1, a_2, a_3, a_4 за значеннями коефіцієнтів цих характеристичних поліномів. Спочатку знайдемо значення ваги a_1 за коефіцієнтом $-a_1^2$, потім за коефіцієнтом $a_1^2a_4^2$ знайдемо вагу a_4 , далі за коефіцієнтом $-(a_2^2 + a_4^2)$ знайдемо вагу a_2 та потім за коефіцієнтом $-(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$ знайдемо вагу a_3 .

Таким чином, усі ваги графа $C_3 + e$ можуть бути однозначно визначені за трьома підспектрами, отже, доведено таку нерівність:

$$Srn(C_3 + e) \leq 3.$$

Перейдемо до другої частини доведення Теорема 2.

Розглянемо всі типи наборів, що складаються з двох різних індукованих підграфів $C_3 + e$, з точністю до ізоморфізму графів, та для кожного такого набору підграфів покажемо, що їх спектрів недостатньо для однозначного відновлення вагової функції w зваженого графа $C_3 + e$.

Через C_3 позначається цикл довжини 3, а через A_k — ланцюг довжини $k - 1$. Число, яке стоїть перед позначенням графа, вказує на кількість таких графів у наборі.

Маємо такі 8 типів наборів:

1. $C_3 + e$;
2. $C_3 + e, A_3$;
3. $C_3 + e, A_2$;
4. C_3, A_3 ;
5. C_3, A_2 ;
6. $2A_3$;
7. A_3, A_2 ;
8. $2A_2$.

Проаналізуємо кожен тип набору та наведемо приклади двох різних вагових функцій для графа $C_3 + e$, для яких є рівними характеристичні поліноми відповідних вибраних індукованих

підграфів. Таким чином, ми доведемо, що двох підспектрів недостатньо для однозначного відновлення ваг графа $C_3 + e$. Очевидно, що з цього випливатиме, що і одного підспектра також недостатньо.

1. $C_3 + e, C_3$. Для набору підграфів першого типу наведемо приклад двох різних наборів ваг:

$$\bullet a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, a_4 = d,$$

$$\bullet a_1 = a, a_2 = c, a_3 = b, a_4 = d,$$

a, b, c, d — довільні додатні числа такі, що $b \neq c$.

Характеристичні поліноми графів $C_3 + e, C_3$ для цих двох наборів ваг будуть рівними відповідно, оскільки ці графи переходять один в одного при перестановці вершин 1 та 2, а як відомо, спектр графа є його інваріантом і не залежить від нумерації його вершин.

2. $C_3 + e, A_3$. Без обмеження загальності можемо розглянути варіант вибору ланцюга A_3^1 з множиною вершин $\{1, 3, 4\}$, оскільки інший випадок розглядається аналогічно.

Розглянемо такі два різні набори ваг:

$$\bullet a_1 = 2, a_2 = \sqrt{2\sqrt{3} + 3}, a_3 = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}, a_4 = 1,$$

$$\bullet a_1 = 1, a_2 = a_3 = \sqrt[4]{12}, a_4 = 2.$$

Характеристичні поліноми графів $C_3 + e, A_3$ для цих двох наборів ваг будуть рівними відповідно, оскільки значення виразів $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$, $a_1a_2a_3$, $a_1^2a_4^2$ та $a_2^2 + a_4^2$ для вказаних двох наборів ваг є рівними відповідно.

3. $C_3 + e, A_2$. Існують два принципово різні варіанти вибору ланцюга A_2 .

1. Ланцюг A_2 з множиною вершин $\{1, 2\}$ або $\{3, 4\}$. У цьому випадку розглянемо той самий приклад з двома різними наборами ваг, що і для першого типу набору індукованих підграфів.

2. Ланцюг A_2 з множиною вершин $\{1, 3\}$ або $\{2, 3\}$. Оскільки ці випадки аналогічні, то розглянемо перший з них. Наведемо приклад двох різних наборів ваг:

$$\bullet a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1,$$

$$\bullet a_1 = \sqrt{2}, a_2 = 1, a_3 = a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

a, b, c — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

Для цих двох наборів ваг характеристичні поліноми графів $C_3 + e, A_2$ будуть рівними відповідно.

4. C_3, A_3 . Без обмеження загальності можемо розглянути варіант вибору ланцюга A_3^1 з множиною вершин $\{1, 3, 4\}$, оскільки інший випадок розглядається аналогічно.

Розглянемо такі два різні набори ваг:

$$\bullet a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, a_4 = d,$$

- $a_1 = c, a_2 = b, a_3 = a, a_4 = d,$

a, b, c, d — довільні додатні числа такі, що $a \neq c$.

Характеристичні поліноми графів C_3 , A_3 для цих двох наборів ваг будуть рівними відповідно, оскільки зважені графи C_3 для першого та другого набору ваг переходять один в одного при перестановці вершин 1 та 3, а графи A_3 мають одну й ту саму вагову функцію.

5. C_3 , A_2 . Очевидно, що у разі вибору в ролі графа A_2 ланцюга з множиною вершин $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ або $\{2, 3\}$, вага ребра $\{3, 4\}$ буде невизначеною.

Якщо ж як A_2 обрано ланцюг з множиною вершин $\{3, 4\}$, то можемо розглянути той самий приклад з двома різними наборами ваг, що і для першого типу набору індукованих підграфів.

Отже, однозначне відновлення усіх ваг графа $C_3 + e$ за підспектрами такого типу набору двох індукованих підграфів неможливе.

6. $2A_3$; 7. A_3 , A_2 ; 8. $2A_2$. Для усіх таких типів наборів очевидно, що вагу принаймні одного ребра графа $C_3 + e$ неможливо визначити.

Розглянуто та проаналізовано всі можливі типи наборів, що складаються з двох різних індукованих підграфів $C_3 + e$. Показано, що за спектрами жодного з таких наборів підграфів неможливо однозначно відновити ваги всіх ребер графа $C_3 + e$. Отже, $Srn(C_3 + e) > 2$. Оскільки водночас доведено, що $Srn(C_3 + e) \leq 3$, маємо $Srn(C_3 + e) = 3$. Таким чином, Теорему 2 доведено.

Обернена спектральна задача для графа $K_4 - e$

Також дослідимо задачу відновлення ваг для графа $K_4 - e$ та доведемо теорему про спектральне відновлювальне число графа $K_4 - e$.

Теорема 3. $Srn(K_4 - e) = 4$.

Доведення. Як множину вершин для зручності оберемо множину $\{1, 2, 3, 4\}$ та позначимо ваги на його ребрах через a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 згідно з рис. 2.

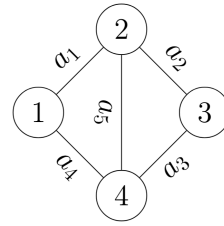


Рис. 2. Зважений граф $K_4 - e$

Спочатку доведемо, що $Srn(K_4 - e) \leq 4$.

Для цього достатньо вказати четвірку індукованих підграфів, за спектрами яких можна однозначно визначити всі ваги ребер графа $K_4 - e$ для будь-якої вагової функції w . Це така четвірка:

$$K_4 - e, C_3^1, A_3^1, A_2^1.$$

Позначення C_3^1 , A_3^1 та A_2^1 відповідають індукованим підграфам з множинами вершин $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$ та $\{1, 2\}$ відповідно.

Знайдемо за узагальненою теоремою Захса (Теорема 1) характеристичні многочлени графа $K_4 - e$ та його вибраних індукованих підграфів:

$$\begin{aligned} P_{A_2^1}(\lambda) &= \lambda^2 - a_1^2; \\ P_{A_3^1}(\lambda) &= \lambda^3 - (a_1^2 + a_2^2)\lambda; \\ P_{C_3^1}(\lambda) &= \lambda^3 - (a_1^2 + a_4^2 + a_5^2)\lambda - 2a_1a_4a_5; \\ P_{K_4-e}(\lambda) &= \lambda^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)\lambda^2 - \\ &\quad - 2(a_1a_4a_5 + a_2a_3a_5)\lambda + a_1^2a_3^2 + a_2^2a_4^2 - 2a_1a_2a_3a_4. \end{aligned}$$

Спочатку за $P_{A_2^1}(\lambda)$ відновлюємо значення ваги a_1 . Потім за $P_{A_3^1}(\lambda)$ знаходимо вагу a_2 . Далі за значеннями коефіцієнтів $-(a_1^2 + a_4^2 + a_5^2)$ та $-(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)$ поліномів $P_{C_3^1}(\lambda)$ та $P_{K_4-e}(\lambda)$ визначаємо вагу a_3 . За коефіцієнтами $-2a_1a_4a_5$ та $-2(a_1a_4a_5 + a_2a_3a_5)$ цих поліномів та значеннями a_2, a_3 знаходимо значення ваги a_5 . Насамкінець за коефіцієнтом $-2a_1a_4a_5$ та значеннями a_1, a_5 визначаємо вагу a_4 .

Таким чином, усі ваги графа $K_4 - e$ можуть бути однозначно відновлені за чотирма підспектрами, тому доведено нерівність

$$Srn(K_4 - e) \leq 4.$$

Перейдемо до доведення неможливості однозначного відновлення ваг графа $K_4 - e$ за трьома підспектрами. З цього випливатиме, що й меншої кількості підспектрів також недостатньо.

Розглянемо всі можливі типи наборів, які складаються з трьох різних індукованих підграфів $K_4 - e$, з точністю до ізоморфізму графів.

Маємо 14 типів таких наборів:

1. $K_4 - e, 2C_3$;

2. $K_4 - e, C_3, A_3$;
3. $K_4 - e, 2A_3$;
4. $K_4 - e, C_3, A_2$;
5. $K_4 - e, A_3, A_2$;
6. $K_4 - e, 2A_2$;
7. $2C_3, A_3$;
8. $2C_3, A_2$;
9. $C_3, 2A_3$;
10. $C_3, 2A_2$;
11. C_3, A_3, A_2 ;
12. $2A_3, A_2$;
13. $A_3, 2A_2$;
14. $3A_2$.

Розглянемо усі типи наборів та наведемо приклади двох різних вагових функцій для графа $K_4 - e$, для яких відповідно рівні характеристичні поліноми вибраних індукованих підграфів, а отже і відповідні спектри рівні.

1. Проаналізуємо спочатку набори з трьох індукованих підграфів першого, другого, третього, сьомого, дев'ятого та дванадцятого типів.

Оскільки інші випадки повністю аналогічні, то без обмеження загальності можна вважати, що у другому типі набору обрано індуковані підграфи C_3^1 та A_3^1 з множинами вершин $\{1, 2, 4\}$ та $\{1, 2, 3\}$ відповідно. Також для сьомого та дев'ятого типів набору будемо вважати, що як підграфи A_3 та C_3 обрано A_3^1 та C_3^1 відповідно.

Для дванадцятого типу набору можна вважати, що як підграф A обрано індукований підграф A_2^5 з множиною вершин $\{2, 4\}$, оскільки в іншому випадку вага a_5 залишиться невизначеною.

Наведемо приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a_2 = a, a_3 = a_4 = b, a_5 = c,$
- $a_1 = a_2 = b, a_3 = a_4 = a, a_5 = c,$

a, b, c — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

Нескладно переконатися, що характеристичні поліноми зважених графів $K_4 - e$ рівні для наведених двох наборів ваг поліному

$$P_{K_4-e}(\lambda) = \lambda^4 - (2a^2 + 2b^2 + c^2)\lambda^2 - 4abc\lambda + a^4 + b^4 - 2a^2b^2.$$

Характеристичні поліноми двох індукованих підграфів, що є циклами довжини 3, також рівні між собою для обох наборів ваг та рівні такому поліному:

$$P_{C_3}(\lambda) = \lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\lambda^2 - 2abc.$$

Також рівні між собою характеристичні поліноми двох індукованих підграфів, що є ланцюгами довжини 2, для обох наборів ваг, вони рівні такому поліному:

$$P_{A_3}(\lambda) = \lambda^3 - (a^2 + b^2)\lambda.$$

Отже, відновити ваги графа $K_4 - e$ за спектрами вибраних вище наборів індукованих під-

графів неможливо. Для інших типів наборів будемо лише вказувати потрібні приклади двох різних вагових функцій, обґрунтування неможливості однозначного відновлення ваг аналогічні до наведеного вище.

2. Дослідимо набір четвертий типу:

$$K_4 - e, C_3, A_2.$$

Без обмеження загальності можна вважати, що обрано індукований підграф C_3^1 з множиною вершин $\{1, 2, 4\}$.

Існують два принципово різні варіанти вибору ланцюга A_2 .

1. Ланцюг A_2 , що є підграфом C_3^1 . У цьому випадку наведемо такий приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a_3 = a_4 = a, a_2 = b, a_5 = c,$
- $a_1 = a_2 = a_4 = a, a_3 = b, a_5 = c,$

де a, b, c — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

2. Ланцюг A_2 , що не є підграфом C_3^1 . У цьому випадку розглянемо такі два різні набори ваг:

- $a_1 = a_2 = a_3 = a, a_4 = b, a_5 = c,$
- $a_2 = a_3 = a_4 = a, a_1 = b, a_5 = c,$

a, b, c — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

5. Проаналізуємо набір п'ятого типу:

$$K_4 - e, A_3, A_2.$$

Без обмеження загальності можна вважати, що обрано індукований підграф A_3^1 з множиною вершин $\{1, 2, 3\}$.

Існує два принципово різні варіанти щодо вибору ланцюга A_2 .

1. Ланцюг A_2 , що містить вершину 2. Для цього варіанта розглянемо такі два різні набори ваг:

- $a_1 = a_2 = a_3 = a, a_4 = b, a_5 = c,$
- $a_1 = a_2 = a_4 = a, a_3 = b, a_5 = c,$

a, b, c — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

2. Ланцюг A_2 , що не містить вершину 2. Тоді наведемо такий приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a_3 = a_4 = a, a_2 = b, a_5 = c,$
- $a_2 = a_3 = a_4 = a, a_1 = b, a_5 = c,$

a, b, c — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

4. Проаналізуємо набір шостого типу:

$$K_4 - e, 2A_2.$$

Розглянемо всі можливі варіанти вибору двох підграфів A_2 .

1. Якщо обрано підграф A_2^5 з множиною вершин $\{2, 4\}$ та підграф, що містить вершину 2 або вершину 4. Оскільки ці випадки аналогічні, то без обмежень загальності, розглянемо випадок вибору A_2^1 з множиною вершин $\{1, 2\}$.

Для цього варіанта наведемо приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a, a_3 = b,$
 - $a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = a, a_2 = b,$
- a, b — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

2. Якщо обрано два підграфи $\mathbf{A}$, що мають спільну вершину, окрім тих випадків, які розглянути у першому варіанті. Достатньо розглянути два випадки: обрані підграфи $\mathbf{A}$ з множинами вершин $\{1, 2\}$ та $\{1, 4\}$ або $\{1, 2\}$ та $\{2, 3\}$. Інші випадки аналогічні.

Для цих випадків розглянемо такі два різні набори ваг:

- $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a, a_3 = b,$
 - $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = a, a_4 = b,$
- a, b — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

3. Якщо обрано два підграфи $\mathbf{A}$, що не мають спільної вершини. Достатньо розглянути один випадок, оскільки інший аналогічний: обрані підграфи $\mathbf{A}$ з множинами вершин $\{1, 2\}$ та $\{3, 4\}$.

Наведемо приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a_3 = a, a_2 = b, a_4 = d, a_5 = c, a_5 = e,$
 - $a_1 = a_3 = a, a_2 = d, a_4 = b, a_5 = c, a_5 = c,$
- a, b, c, d — довільні додатні числа такі, що $b \neq d$.

5. Аналіз набору $2\mathbf{C}_3$, $\mathbf{A}_2$ восьмого типу проводиться аналогічно до аналізу набору четвертого типу: варто розглянути такі самі варіанти вибору ланцюга $\mathbf{A}_2$ та набори ваг.

6. Проаналізуємо набір одинадцятого типу: $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_2$.

Без обмеження загальності можна вважати, що обрано підграфи $\mathbf{C}_3^1$ та $\mathbf{A}_3^1$ з множинами вершин $\{1, 2, 4\}$ та $\{1, 2, 3\}$ відповідно. Також можна вважати, що як підграф $\mathbf{A}_2$ обрано $\mathbf{A}_2^3$ з множиною вершин $\{3, 4\}$, оскільки в іншому випадку неможливо відновити значення ваги a_3 .

Наведемо приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, a_4 = d, a_5 = e,$
- $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = e, a_4 = d, a_5 = c,$

a, b, c, d, e — довільні додатні числа такі, що $d \neq e$.

7. Для наборів останніх двох типів — $\mathbf{A}_3$, $2\mathbf{A}_2$ або $3\mathbf{A}_2$ — очевидно, що вагу принаймні одного ребра графа $\mathbf{K}_4 - e$ неможливо визначити.

Розглянуто всі можливі типи наборів, що складаються з трьох різних індукованих підграфів графа $K_4 - e$. Для наборів кожного типу наведено приклади двох різних вагових функцій, за яких відповідні зважені підграфи мають однакові характеристичні поліноми, а отже, й однакові спектри. Це доводить, що за трьома підспектрами неможливо однозначно відновити ваги всіх ребер графа $\mathbf{K}_4 - e$.

Отже, $Srn(K_4 - e) > 3$.

Водночас показано, що чотирьох підспектрів достатньо для повного відновлення всіх ваг ребер, тобто $Srn(K_4 - e) \leq 3$.

Таким чином, маємо $Srn(K_4 - e) = 4$.

Теорему 3 доведено.

Висновки

У цій роботі досліджено обернену спектральну задачу для зважених графів та визначено точні значення спектральних відновлювальних чисел для графів $\mathbf{C}_3 + e$ та $K_4 - e$.

Застосовуючи узагальнену теорему Захса, побудовано характеристичні многочлени відповідних зважених графів та їхніх індукованих підграфів. Показано, що за трьома або чотирма підспектрами відповідно можна однозначно відновити всі ваги ребер, тоді як за меншої кількості підспектрів відновлення є неоднозначним.

Отримані результати завершують визначення спектральних відновлювальних чисел для всіх зв'язних графів порядку не більш як чотири. Вони створюють основу для подальших досліджень обернених спектральних задач і можуть бути використані під час розроблення алгоритмів відновлення додатних ваг ребер у зважених графах.

Список літератури

1. Brouwer A. E., Haemers W. H. Spectra of Graphs. New York : Springer, 2011. P. 250.
2. Cvetković D. Applications of Graph Spectra: An Introduction to the Literature. *Zbornik Radova*. 2011. Issue 22. Pp. 9–34.
3. Salim A., Sumitra S. Spectral Graph Convolutional Neural Networks in the Context of Regularization Theory. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2024. Vol. 35, No. 4. Pp. 4373–4384.
4. Sen S., Pal S., Sengupta S. Social Sensors in Epidemiological Networks via Graph Eigenvectors. arXiv preprint arXiv:2112.14385. 2021.
5. Hogben L. Spectral graph theory and the inverse eigenvalue problem of a graph. *Chamchuri Journal of Mathematics*. 2009. Vol. 1. Pp. 51–72.
6. Chu M. T. Inverse eigenvalue problems. *SIAM Review*. 1998. Vol. 40, no. 1. Pp. 1–39.
7. Chu M. T., Golub G. H. Structured inverse eigenvalue problems. *Acta Numerica*. 2002. Vol. 11. P. 1–71.
8. Nizhnik L. P., Rabanovich V. I. On new inverse spectral

- problems for weighted graphs. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2017. Vol. 23, no. 1, Pp. 66–75.
9. Sachs H. Beziehungen zwischen den in einem graphen enthaltenen kreisen und seinem charakteristischen polynom. *Publ. Math. Debrecen*. 1964. Bd. 11. S. 119–134.
 10. Тимошкевич Л. М. Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. 2013. Т. 14. С. 165–175.
 11. Пилипіва О. В., Тимошкевич Л. М. Відновлююче спектральне число зважених графів-циклів. *Наука в контексті глобальної трансформації суспільства. Матеріали науково-практичної конференції (м. Полтава, 26–27 серпня 2022 р.)*. Одеса : Видавництво «Молодий вчений», 2022. С. 113–116.
 12. Аверкін О. С., Тимошкевич Л. М. Відновлююче спектральне число графа K_4 . *Могиланський математичний журнал*. 2024. Т. 7. С. 9–16.
 13. Тимошкевич Л. М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера : дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06. Київ, 2015. 160 с.
 14. Пилипіва О. В., Тимошкевич Л. М. Обернені спектральні задачі для зважених графів. *Могиланський математичний журнал*. 2022. Т. 5. С. 26–32.

References

1. A. E. Brouwer and W. H. Haemers, *Spectra of Graphs* (Springer, New York, 2011), p. 250.
2. D. Cvetković, *Zbornik Radova*. **22**, 9–34 (2011).
3. A. Salim and S. Sumitra, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. **35** (4), 4373–4384 (2024).
4. S. Sen, S. Pal and S. Sengupta, arXiv preprint arXiv:2112.14385 (2021).
5. L. Hogben, *Chamchuri Journal of Mathematics*. **1**, 51–72 (2009).
6. M. T. Chu, *SIAM Review*. **40** (1), 1–39 (1998).
7. M. T. Chu and G. H. Golub, *Acta Numerica*. **11**, 1–71 (2002).
8. L. P. Nizhnik and V. I. Rabanovich, *Methods of Functional Analysis and Topology*. **23** (1), 66–75 (2017).
9. H. Sachs, *Publ. Math. Debrecen*. **11**, 119–134 (1964).
10. L. M. Tymoshkevych, *Scientific Journal of Mykhailo Dragomanov State University of Ukraine. Seriya 1. Physical and mathematical sciences*, **14**, 165–175 (2013).
11. O. V. Pylypiva and L. M. Tymoshkevych, in: *Proceedings of the Scientific-Practical Conference* (Poltava, August 26–27, 2022) (“Molodyi Vchenyi” Publishing, Odesa, 2022), pp. 113–116.
12. O. S. Averkin and L. M. Tymoshkevych, *Mohyla Mathematical Journal*. **7**, 9–16 (2024).
13. L. M. Tymoshkevych, PhD diss., Kyiv, 2015.
14. O. V. Pylypiva and L. M. Tymoshkevych, *Mohyla Mathematical Journal*. **5**, 26–32 (2022).

L. Tymoshkevych, K. Cherniavska

SPECTRAL RECONSTRUCTION NUMBERS OF GRAPHS $C_3 + e$ AND $K_4 - e$

This paper investigates an inverse spectral problem for weighted graphs. The problem under consideration concerns the reconstruction of edge weights from the spectra of induced subgraphs. We focus on determining the *spectral reconstruction number* $Srn(G)$, defined as the minimal number of spectra of induced subgraphs required to uniquely recover all edge weights of a weighted graph G .

The main contribution of this work is the exact determination of the spectral reconstruction number for the paw graph $C_3 + e$ and the diamond graph $K_4 - e$.

The obtained results complete the determination of spectral reconstructive numbers for all connected graphs of order at most four. They can be used for further research on inverse spectral problems and for developing algorithms to reconstruct edge weights in graphs.

Keywords: spectra of graph, eigenvalues, inverse spectral problems, weighted graph, subgraphs of graph.

Матеріал надійшов 13.10.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)