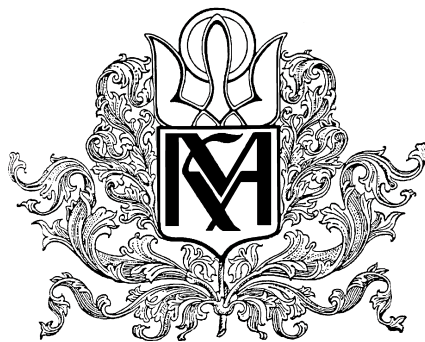




НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

МОГИЛЯНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ журнал

Том 8 ♦ 2025

Науковий журнал ♦ Щорічник ♦ Заснований у 1996 р.

Київ
2025

Засновник (1996 р.) і видавець журналу — Національний університет «Києво-Могилянська академія»

**Виходив як частина багатосерійного видання «Наукові записки НаУКМА»
(«Фізико-математичні науки»)**

**З 2018 р. — окреме видання, що має назву «Могилянський математичний журнал»
(англ. «Mohyla Mathematical Journal»)**

Періодичне наукове видання «Могилянський математичний журнал» засновано з метою публікації результатів науково-дослідних робіт, теоретичних досліджень учених, науково-педагогічних працівників, аспірантів, магістрів і студентів, присвячених широкому колу питань сучасної математичної науки.

Тематичне розмаїття статей охоплює історію математики, виклад результатів теоретичних досліджень з математики і статистики, а також їх застосувань.

Мови видання: українська, англійська.

Редакційна колегія

Головний редактор:

Олійник Б. В., д-р фіз.-мат. наук, професор (НаУКМА, Україна)

Відповідальний секретар:

Гапоненко В. О., аспірант програми «Прикладна математика», асистент кафедри математики (НаУКМА, Україна)

Глибовець М. М., д-р фіз.-мат. наук, професор (НаУКМА, Україна)

Голубовські В., доктор габілітований із математики, професор (Сілезький політехнічний університет, Польща)

Городній М. Ф., д-р фіз.-мат. наук, професор (КНУ імені Тараса Шевченка, Україна)

Жучок Ю. В., д-р фіз.-мат. наук, професор (ЛНУ імені Тараса Шевченка, Україна)

Іванов О. В., д-р фіз.-мат. наук, професор (НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», Україна)

Клесов О. І., д-р фіз.-мат. наук, професор (НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», Україна)

Козеренко С. О., канд. фіз.-мат. наук, старший викладач (НаУКМА, Україна)

Крюкова Г. В., канд. фіз.-мат. наук, доцент (НаУКМА, Україна)

Кошманенко В. Д., д-р фіз.-мат. наук, професор (Інститут математики НАН України, Україна)

Лавренюк М. В., канд. фіз.-мат. наук, доцент (КНУ імені Тараса Шевченка, Україна)

Любашенко В. В., д-р фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник (Інститут математики НАН України, Україна)

Маципура В. Т., д-р фіз.-мат. наук, професор (КНУ імені Тараса Шевченка, Україна)

Наумова В., канд. фіз.-мат. наук (Столичний центр цифрової інженерії Сімула, Норвегія)

Орловський І. В., канд. фіз.-мат. наук, доцент (НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», Україна)

Переверзев С. В., д-р фіз.-мат. наук, професор (RICAM, Австрія)

Чечурін Л., д-р тех. наук, професор (Технологічний університет Лаппеенранта-Лахті LUT, Фінляндія)

Чорней Р. К., канд. фіз.-мат. наук, доцент (НаУКМА, Україна)

Швай Н. О., канд. фіз.-мат. наук, доцент (НаУКМА, Україна)

Здійснюється подвійне анонімне рецензування матеріалів

Засновник і видавець:

Національний університет

«Києво-Могилянська академія»

Ідентифікатор у Реєстрі суб'єктів у сфері медіа:

R40-04348

Внесено до Переліку наукових фахових видань
України, в яких можуть публікуватися

результати дисертаційних робіт на здобуття
наукових ступенів доктора наук, кандидата наук
та ступеня доктора філософії, категорія «Б»
(наказ МОН України від 15.04.2021 № 420)

© НаУКМА, 2025

ГОТФРІД ЛЕЙБНІЦ І СТВОРЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

У статті розглядається внесок Готфріда Вільгельма Лейбніца у створення диференціального числення в контексті його філософської системи. Досліджено взаємозв'язок між метафізичною концепцією монад та математичним поняттям нескінченно малих величин. Проаналізовано публікацію «*Nova methodus pro maximis et minimis*» 1684 року як першу друковану працю з диференціального числення. Висвітлено особливості лейбніцівського підходу до математичного аналізу, його нотацію та методологію. Розглянуто історичну суперечку щодо пріоритету винаходу числення між Лейбніцем та Ньютоном. Показано вплив філософських ідей Лейбніца на формування сучасного математичного аналізу.

Ключові слова: диференціальне числення, монадологія, нескінченно малі величини, *Nova methodus*, історія математики, Лейбніц.

Вступ

Створення диференціального та інтегрального числення в останній третині XVII століття стало одним із найвизначніших досягнень в історії математики, що кардинально змінило не лише математичну науку, а й природознавство загалом. Серед творців цього потужного математичного апарату особливе місце посідає постать Готфріда Вільгельма Лейбніца (1646–1716) — німецького філософа, математика, юриста та дипломата, чий внесок у розвиток математичного аналізу був нерозривно пов'язаний з його філософськими поглядами на природу реальності. На відміну від свого сучасника Ісаака Ньютона, який розробляв метод флюксій переважно для вирішення фізичних задач, Лейбніц підійшов до створення числення з позицій універсального методу пізнання, що мав стати частиною його амбітного проєкту «*characteristica universalis*» — універсальної мови науки [2].

Філософські ідеї та математична реалізація цих ідей

Філософське підґрунтя математичних інновацій Лейбніца найяскравіше виявляється в його вченні про монади — прості, неподільні субстанції, що становлять фундамент реальності. Монади, згідно з Лейбніцем, є справжніми субстанціями, позбавленими матеріального чи просторового характеру, але наділеними внутрішньою активністю — ентелехією, *conatus* або *visus* (прагненням), первинною силою та внутрішнім принципом зміни. Ця концепція метафізичної неподільності знайшла своє математичне втілення в понятті нескінченно малих вели-

чин — диференціалів, які, подібно до монад у метафізиці, були неподільними «атомами» математичного континууму. Лейбніц вважав, що нескінченна кількість монад складає простір, який таким чином не є порожнім, як стверджував Ньютон, а наповнений монадами, що, будучи неподільними та не займаючи простору, є основою для всього іншого через взаємодію між собою.

Математична реалізація цих філософських ідей почала оформлюватися в середині 1670-х років, коли Лейбніц, перебуваючи в Парижі та спілкуючись з видатними математиками того часу, зокрема з Християном Гюйгенсом, почав розробляти власний підхід до аналізу нескінченно малих. До 1677 року він уже мав цілісну систему, але не публікував її до 1684 року. Результатом цієї багаторічної роботи стала публікація в жовтневому номері лейпцизького журналу «*Acta Eruditorum*» статті під назвою «*Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illi calculi genus*» («Новий метод для максимумів і мінімумів, а також дотичних, який не затримується ні на дробових, ні на ірраціональних величинах, і особливий для цього рід числення») [3].

Ця перша друкована праця з диференціального числення, попри свою стислість — усього шість з половиною сторінок, написаних депо неорганізовано та з численними друкарськими помилками — заклала основи нової математичної дисципліни.

У статті Лейбніц увів диференціал dx , що задовольняв правилам:

$$d(x + y) = dx + dy, \quad d(xy) = x dy + y dx, \quad (1)$$

і проілюстрував своє числення кількома прикладами. Два роки потому він опублікував другу статтю «Про глибоко приховану геометрію», в якій увів та пояснив символ $\int f(x) dx$ для інтегрування. Саме ця нотація, на відміну від флюксійного запису Ньютона, стала стандартною в математичному аналізі та використовується донині. Прийняття математичною спільнотою нового числення Лейбніца не було миттєвим. Йоганн Бернуллі у своїй автобіографії згадував, що він та його брат натрапили на коротку статтю Лейбніца в Acta за 1684 рік, де той «у ледь п'яти чи шести сторінках накреслив дуже невиразну ідею диференціального числення, що було скоріше загадкою, ніж поясненням; однак цього було достатньо для нас, щоб зрозуміти весь секрет за кілька днів». Незважаючи на початкові труднощі в розумінні, метод Лейбніца швидко поширився континентальною Європою завдяки його послідовникам, особливо братам Бернуллі, які активно розвивали та популяризували нове числення [2].

Філософські основи лейбніцівського числення виявляються не лише в концепції нескінченно малих, а й у його розумінні природи континууму та нескінченності. Для Лейбніца математика була не просто інструментом для вирішення практичних задач, а способом осягнення глибинної структури реальності. У його математичному мисленні керували п'ять ключових понять: calculus (числення), characteristic (характеристика), ars inveniendi (мистецтво винаходу), method (метод) та freedom (свобода). Числення для нього означало універсальність та плідність — щось мало обчислюватися таким чином, щоб зберігалися однорідність та справедливність (iustitia) або симетрія [3].

Особливо важливим є зв'язок між монадологією Лейбніца та його математичними концепціями. Сучасні дослідження показують, що монади мають положення через свої власні тіла, і навіть якщо власне розташованими є (протяжні) тіла, немає циркулярності в твердженні, що протяжність тіла впливає з взаємного розташування його частин. Ця ідея перегукується з математичним розумінням континууму як чогось, що складається з нескінченної кількості нескінченно малих елементів, кожен з яких має своє «положення» в системі відношень.

Історична суперечка щодо пріоритету винаходу числення між Лейбніцем та Ньютоном, що розгорілася на початку XVIII століття, стала однією з найвідоміших наукових полемік в істо-

рії математики. Хоча Ньютон розробив свій метод флюксій ще в 1666 році у віці 23 років, він не публікував його до 1737 року. Лейбніц почав працювати над своїм варіантом числення в 1674 році та опублікував першу статтю в 1684 році. Сьогодні визнано, що обидва вчені незалежно створили диференціальне та інтегральне числення, причому їхні методи були глибоко різними — Ньютон спирався більше на геометричну інтуїцію та кінематичні проблеми, тоді як Лейбніц підходив до числення з алгебраїчної точки зору [1].

Вплив лейбніцівського підходу на подальший розвиток математики важко переоцінити. Його нотація виявилася не лише зручнішою за ньютонівську, а й більш придатною для подальших узагальнень. Сучасні дослідження основ диференціального числення Лейбніца продовжують відкривати нові аспекти його математичної думки. У XX столітті ідеї Лейбніца про нескінченно малі величини отримали строге обґрунтування в нестандартному аналізі Абрахама Робінсона, що можна розглядати як запізніле виправдання математичних міркувань Лейбніца.

Метафізичні корені математики Лейбніца виявляються також у його концепції передвстановленої гармонії. Подібно до того, як дві синхронізовані години показують однаковий час не через взаємний вплив, а завдяки спільній причині (налаштуванню годинником), монади діють узгоджено не через безпосередню взаємодію, а через передвстановлену гармонію. Ідея знайшла своє відображення в математичному понятті функціональної залежності, де зміни однієї величини закономірно пов'язані зі змінами іншої без необхідності фізичної причинності. Лейбніцівське розуміння нескінченності та континууму було тісно пов'язане з його уявленням про досконалість світу. Він стверджував, що було б великою втратою можливої досконалості дозволяти живим істотам мати тіла лише на тому конкретному рівні агрегації, з яким ми феноменально знайомі, ідея «повноти буття» (plenitudo) знайшла математичне вираження в концепції неперервності функцій та повноти числової прямої. Для Лейбніца математичний континуум був не просто абстрактною конструкцією, а відображенням метафізичної структури реальності, де кожна точка має своє унікальне «місце» в системі відношень, подібно до того, як кожна монада має свою унікальну «точку зору» на універсум.

Висновки

Створення диференціального числення Готфрідом Лейбніцем являє собою унікальний приклад плідної взаємодії філософської думки та математичної творчості. Його метафізична система монадології не просто супроводжувала математичні відкриття, але була їхньою концептуальною основою, надаючи інтуїтивне розуміння природи нескінченно малих величин та континууму. Публікація «*Nova methodus*» у 1684 році стала не лише початком нової ери в математиці, а й демонстрацією того, як глибокі філософські ідеї можуть трансформуватися в потужні математичні інструменти. Історичне зна-

чення внеску Лейбніца полягає не тільки в технічних досягненнях — створенні зручної нотації та ефективних алгоритмів, а й у формуванні нового способу математичного мислення, де аналіз нескінченно малих став основою для розуміння змін та руху. Його підхід, на відміну від більш прагматичного методу Ньютона, відкрив шлях до подальших узагальнень та абстракцій, що визначили розвиток математичного аналізу в наступні століття. Сучасне відродження інтересу до основ лейбніцівського числення та нестандартного аналізу свідчить про непересічну актуальність його ідей для розуміння природи математичного континууму та нескінченності.

Список літератури

1. Бевз В. Г. Історія математики. Харків : Основа, 2006.
2. Бородин О. І. Історія розвитку поняття про число і систему числення. Київ : Радянська школа, 1978.
3. Ленюк М. П., Михацький М. А., Нариси з історії розвитку математики в Україні. Чернівці : Прут, 2004.
4. Назаров В. Ю. Елементи історії математики : навч. посібник. Ніжин : НДПУ, 2002.
5. Шмигевський М. В. Видатні математики. Харків : Основа, 2004.
6. Suntola T. The short history of science—or the long path to the union of metaphysics and empiricism. CreateSpace USA, 2018.

References

1. V. H. Bevez, *History of Mathematics* (Osnova, Kharkiv, 2006).
2. O. I. Borodin, *History of the Development of the Concept of Number and Numeral System* (Radianska shkola, Kyiv, 1978).
3. M. P. Leniuk and M. A. Mykhatskyi, *Essays on the History of Mathematics Development in Ukraine* (Prut, Chernivtsi, 2004).
4. V. Yu. Nazarov, *Elements of the History of Mathematics: Textbook for Students of Physics and Mathematics Faculties* (NDPU, Nizhyn, 2002).
5. M. V. Shmyhevskyi, *Outstanding Mathematicians* (Osnova, Kharkiv, 2004).
6. T. Suntola, *The short history of science—or the long path to the union of metaphysics and empiricism* (CreateSpace USA, 2018).

K. Fedorovska

GOTTFRIED LEIBNIZ AND THE CREATION OF DIFFERENTIAL CALCULUS

The article examines Gottfried Wilhelm Leibniz's contribution to the creation of differential calculus within the context of his philosophical system. The relationship between the metaphysical concept of monads and the mathematical notion of infinitesimals is investigated. The 1684 publication “*Nova methodus pro maximis et minimis*” is analyzed as the first printed work on differential calculus. The features of Leibniz's approach to mathematical analysis, his notation and methodology are highlighted. The historical controversy regarding the priority of the invention of calculus between Leibniz and Newton is examined. The influence of Leibniz's philosophical ideas on the formation of modern mathematical analysis is demonstrated.

Keywords: differential calculus, monadology, infinitesimals, *Nova methodus*, history of mathematics, Leibniz.

Матеріал надійшов 07.10.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ ПОШУКУ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ ВІДОБРАЖЕННЯ В ПРОСТОРАХ БАГАТОВИМІРНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

У статті розглянуто задачу пошуку нерухомої точки для відображень у просторах багатовимірних послідовностей. Автори формують і доводять основну теорему, що забезпечує існування та єдиність розв'язку рівняння типу $\bar{x} = \bar{h} + A\bar{x}$, де A є лінійним оператором у просторі Банаха з певними властивостями. В роботі введено систему півнорм, яка узгоджується з нормою простору та задовольняє умови монотонності й обмеженості. Використовуючи метод послідовних наближень та аналіз збіжності відповідного ряду, доведено існування розв'язку задачі, а також отримано оцінки для норми розв'язку. Особливу увагу приділено доведенню обмеженості оператора та унікальності розв'язку, що гарантує коректність постановки задачі. Запропоновані результати є розвитком класичних підходів до задачі нерухомих точок у новому контексті багатовимірних послідовностей, що мають як теоретичну, так і прикладну цінність.

Ключові слова: нерухома точка, лінійні оператори, норма, півнорма.

Вступ

Проблема існування та єдиності нерухомих точок відображень є фундаментальною у функціональному аналізі й має широке коло застосувань у теорії динамічних систем, стохастичних процесів, оптимальному керуванні та обчислювальній математиці. Класичні результати, починаючи від робіт Банаха [1], сформували основу сучасної теорії нерухомих точок і стали ключовими для розв'язання нелінійних рівнянь, задач оптимізації та аналізу ітераційних методів. Подальший розвиток цієї тематики відображено у фундаментальних монографіях Dugundji та Granas [2], а також у працях Kelley [3], де викладено топологічні засади, необхідні для формулювання та доведення узагальнених теорем про нерухомі точки.

Додатковий імпульс дослідженням надали роботи, присвячені аналізу нескінченних матриць і просторів послідовностей [4], які створили передумови для розширення теорії на багатовимірні та структуровані простори. Ці підходи виявилися особливо корисними у задачах дискретизації рівнянь математичної фізики, що призводять до багатовимірних різницевих аналогів диференціальних рівнянь. Отримані рівняння мають багато спільного з тими, що розглядалися у відомій монографії Бріллюена та Пароді [5], присвяченій поширенню хвиль у періодичних структурах, зокрема у кристалічних ґратках.

Початково дослідження фокусувалися на

процесах поширення хвиль тиску, теплових хвиль та дифузії у неоднорідних середовищах. Подальший розвиток обчислювальних можливостей електронно-обчислювальних машин дав змогу вирішувати складні обернені задачі сейсміки, радіолокації, томографії. Точність цих задач істотно залежить від розмірності простору: що більша розмірність, то точнішими є результати. При цьому внутрішня структура розріджених матриць у великих системах дозволяла робити висновки щодо їх розв'язності.

Однак нове коло задач, зокрема у сфері штучного інтелекту, пов'язане з необхідністю роботи із заповненими матрицями, що оперують векторами з мільйонами координат. Це зумовлює актуальність нових підходів, основаних на внутрішніх властивостях відображень, які не потребують застосування традиційних метричних характеристик, як-от стискання.

У цій роботі досліджується задача пошуку нерухомої точки у просторах багатовимірних послідовностей із застосуванням системи півнорм, узгодженої з нормою простору Банаха, але стискання не передбачається. Запропонований результат є іншим підходом, ніж метод сти-скаючих відображень.

Основний результат

Теорема. Нехай B — простір Банаха, $\|\cdot\|_B$ — норма в ньому, A — лінійний оператор в B . Нехай також $\|\cdot\|_n$, $n \in \mathbb{Z}$, — зліченна система півнорм в B , що має властивості монотонно-

сті й обмеженості:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\|_n &\leq \|\bar{x}\|_{n+1}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{x}\|_n &= \|\bar{x}\|_B; \end{aligned} \quad \forall \bar{x} \in B. \quad (1)$$

Нехай також знайдеться така додатна послідовність чисел $\{\alpha(l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$, що $\alpha = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha(l) < \infty$ і для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і кожного елемента $\bar{x} \in B$ виконується нерівність

$$\|A\bar{x}\|_n \leq \sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l) \|\bar{x}\|_l. \quad (2)$$

Тоді оператор A — обмежений, для будь-якого $\bar{h} \in B$ рівняння

$$\bar{x} = \bar{h} + A\bar{x} \quad (3)$$

має єдиний розв'язок у просторі B , і для нього виконується оцінка

$$\|\bar{x}\|_n \leq e^{\sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Доведення. I. Покажемо що оператор A обмежений. Використовуючи обмеженість півнорм і переходячи до границі у нерівності (1) за n , отримаємо

$$\|A\bar{x}\|_B \leq \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha(l) \|\bar{x}\|_l \leq \alpha \|\bar{x}\|_B. \quad (5)$$

II. Доведемо існування розв'язку рівняння (3). Для цього скористаємося методом послідовних наближень. Нехай початкове наближення $\bar{x}(0) = \bar{h}$, тоді збіжність ітераційного процесу $\bar{x}(k) = \bar{h} + A\bar{x}(k-1)$ еквівалентна збіжності ряду

$$\bar{x} = \bar{h} + A\bar{h} + A^2\bar{h} + \dots + A^k\bar{h} + \dots \quad (6)$$

Оцінимо елементи ряду (6). Покажемо, що

$$\|A^k\bar{x}\|_n \leq \|\bar{h}\|_n \frac{\left(\sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l)\right)^k}{k!}. \quad (7)$$

Доведення нерівності (7) проведемо методом математичної індукції за індексом k . Нехай $k = 1$, тоді з монотонності півнорм (1) і умови (2) теореми для всіх $\bar{h} \in B$ отримуємо

$$\|A\bar{h}\|_n \leq \sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l) \|\bar{h}\|_l \leq \|\bar{h}\|_n \sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l).$$

Припустимо, що нерівність правильна для

деякого k . Доведемо її для $k+1$ члена ряду:

$$\begin{aligned} \|A^{k+1}\bar{h}\|_n &\leq \sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l) \|A^k\bar{h}\|_l \\ &\leq \|\bar{h}\|_n \sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l) \frac{\left(\sum_{l=-\infty}^{n-1} \alpha(l)\right)^k}{k!}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для зручності введемо позначення

$$F(l) = \sum_{l=-\infty}^n \alpha(l),$$

тоді права частина нерівності (8) набуває вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{\|\bar{h}\|_n}{k!} \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l) - F(l-1))(F(l-1))^k \\ &= \frac{\|\bar{h}\|_n}{k!} \left(\sum_{l=-\infty}^{n-1} F(l)(F(l-1))^k \right. \\ &\quad \left. - \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l-1))^{k+1} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Скористаємося відомою нерівністю, що використовується при доведенні нерівності Гельдера:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (10)$$

де $a, b, p, q > 0$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Покладемо $p = k+1$, $q = \frac{k+1}{k}$ і застосуємо (10) до кожного доданку першої з сум (9). Отримаємо

$$\begin{aligned} &\frac{\|\bar{h}\|_n}{k!} \left(\sum_{l=-\infty}^{n-1} F(l)(F(l-1))^k \right. \\ &\quad \left. - \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l-1))^{k+1} \right) \\ &\leq \frac{\|\bar{h}\|_n}{k!} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l))^{k+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{k+1} \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l-1))^{k+1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l-1))^{k+1} \right) \\ &\leq \frac{\|\bar{h}\|_n}{(k+1)!} \left(\sum_{l=-\infty}^{n-1} F(l)^{k+1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{l=-\infty}^{n-1} (F(l-1))^{k+1} \right) \end{aligned}$$

$$= \|\bar{h}\|_n \frac{(F(n-1))^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Отже, нерівність (7) доведено,

$$\begin{aligned} \|\bar{x}\|_n &= \left\| \bar{h} + \sum_{k=1}^{\infty} A^k \bar{h} \right\|_n \\ &\leq \|\bar{h}\|_n \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F(n-1))^k}{k!} \right) \\ &= \|\bar{h}\|_n e^{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha(l)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

тобто ряд збігається. Його сума є розв'язком рівняння (3). Для розв'язку рівняння (3) виконується оцінка (4).

Покажемо, що інших розв'язків немає, від супротивного. Припустимо, що розв'язків два $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$. Тоді їхня різниця задовольняє однорідному рівнянню

$$\bar{x} = A\bar{x}.$$

Покажемо, що за виконання умов теореми це рівняння має лише тривіальний розв'язок. За умовою теореми послідовність $\{\alpha(l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$ сумується абсолютно. Отже, для кожного $\varepsilon \in [0; 1]$ знайдеться такий номер m , що

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^m \alpha(l) &= \varepsilon < 1 \\ \|\bar{x}\|_m &\leq \sum_{l=-\infty}^{m-1} \alpha(l) \|\bar{x}\|_l \leq \varepsilon \|\bar{x}\|_m. \end{aligned}$$

Звідси $\|\bar{x}\|_m = 0$ і внаслідок монотонності піднорм для всіх $l < m$ виконується $\|\bar{x}\|_l = 0$. З рекурентних нерівностей (2) випливає, що $\|\bar{x}\|_B = 0$, а отже, $\bar{x} = 0$.

Теорему доведено.

Висновки

У статті досліджено задачу пошуку нерухомої точки відображення в просторах багатовимірних послідовностей. Показано, що для широкого класу відображень, які задовольняють умови компактності та неперервності, існують достатні умови розв'язності задачі. Використання ітераційних методів дозволяє не лише довести факт існування нерухомої точки, а й побудувати ефективну процедуру її відшукування.

Отримані результати є ще одним конструктивним підходом до розв'язання задач про пошук нерухомої точки відображень. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення запропонованих підходів для відображень у просторах зі змінною структурою, а також на вивчення задач із додатковими обмеженнями, що мають прикладне значення у математичному моделюванні.

Подяки

This work was partly supported by a grant from the Simons Foundation International [SFI-PD-Ukraine-00014577, O.G.]

Список літератури

1. Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*. 1922. No. 3 (1). Pp. 133–181.
2. Dugundji J., Granas A. Fixed Point Theory. New York: Springer, 2003.
3. Kelley J. L. General Topology. New York: Springer, 1975.
4. Cooke R. G. Infinite Matrices and Sequence Spaces. Dover Publications Inc., 1955.
5. Brillouin L., Parodi M. Propagation des ondes dans les milieux périodiques. Paris: Masson et Dunod, 1956.

References

1. S. Banach, *Fundamenta Mathematicae*. **3** (1), 133–181 (1922).
2. J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory* (Springer, New York, 2003).
3. J. L. Kelley, *General Topology* (Springer, New York, 1975).
4. R. G. Cooke, *Infinite Matrices and Sequence Spaces* (Dover Publications Inc., 1955).
5. L. Brillouin and M. Parodi, *Propagation des ondes dans les milieux périodiques* (Masson et Dunod, Paris, 1956).

ON THE SOLVABILITY OF THE FIXED POINT PROBLEM FOR MAPPINGS IN SPACES OF MULTIDIMENSIONAL SEQUENCES

The article addresses the problem of finding fixed points for mappings in spaces of multidimensional sequences. The authors formulate and prove a fundamental theorem establishing the existence and uniqueness of a solution to the equation of the form $\bar{x} = \bar{h} + A\bar{x}$, where A is a linear operator acting in a Banach space endowed with a countable system of seminorms. These seminorms are consistent with the norm of the space and satisfy monotonicity and boundedness conditions.

By applying the method of successive approximations, the convergence of the corresponding iterative process is analyzed. The study demonstrates that the infinite series arising from the iterative scheme converges, providing an explicit representation of the solution. Furthermore, norm estimates for the solution are derived, showing that the operator under consideration is bounded. The uniqueness of the solution is rigorously established by proving that the associated homogeneous equation admits only the trivial solution under the stated assumptions.

The results presented in this paper extend the classical fixed-point theory into the framework of multidimensional sequence spaces, thereby contributing both to the theory of functional analysis and to applications. In particular, the developed approach is relevant for the study of discrete and continuous dynamical systems, the analysis of stochastic processes, and the design of models in optimal control theory, where identifying stationary states plays a central role.

Overall, the article provides a mathematically rigorous foundation for addressing solvability questions in spaces with complex structures. It enriches the theoretical toolbox available for researchers working on applied problems involving high-dimensional or structured state spaces, thereby opening perspectives for further studies in modern analysis and its applications.

Keywords: fixed point, linear operators, norm, seminorm.

Матеріал надійшов 25.09.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Досліджуються достатні умови показників λ_n та коефіцієнтів Фур'є, при виконанні яких майже періодичні функції $f(t)$ з простору Безиковича $\mathbb{B}^2$ неперервні, неперервно-диференційовні та голоморфні.

У випадку показників λ_n , що мають степеневу асимптотику $\lambda_n = L(n^\alpha + \varepsilon_n)$, де $L \in \mathbb{R}^1$, $\alpha > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ отримано аналог теореми Соболева про вкладення.

Для показників λ_n , що за $n \rightarrow +\infty$ зростають повільніше довільного додатного степеня n , описано клас функцій з простору Безиковича $\mathbb{B}^2$, що мають аналітичне продовження у півплощину $\operatorname{Re} s > a \geq 0$. До таких функцій належить дзета-функція Рімана $\zeta(s)$.

Для функцій з $\mathbb{B}^2$, у яких показники λ_n прямують до нуля, встановлені достатні умови аналітичного продовження до цілих функцій 1-го експоненціального порядку.

Ключові слова: майже періодична, Бор, простір Безиковича, дзета-функція Рімана, ряд Фур'є, ряд Діріхле, голоморфність.

Якщо $h(t)$ — сума двох неперервних періодичних функцій $f(t)$ і $g(t)$ з неспіврозмірними періодами p і q , то $h(t)$ вже не періодична. Разом з тим у деякому розумінні $h(t)$ лишається близькою до періодичної, або, як прийнято говорити, майже періодичною функцією.

За теоремою Кронекера [16], для довільного $\delta > 0$, для неспіврозмірних чисел p і q існує безліч пар натуральних чисел m і n , таких, що $|mp - nq| < \delta$. Звідси випливає, що число

$$\tau = \frac{1}{2}(mp + nq)$$

є для $h(t)$ так званим майже періодом, тобто

$$|h(t + \tau) - h(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1.$$

Число $\varepsilon > 0$ в цій оцінці можна зробити як завгодно малим завдяки вибору малого $\delta > 0$ та неперервності функцій $f(t)$ і $g(t)$.

Основи теорії майже періодичних функцій закладено в монографіях Г. Бора [2], Безиковича [1], Б. Левітана [16] та інших. Оскільки простори таких функцій несепарабельні, то їхні властивості суттєво складніші за відповідні властивості періодичних функцій [10; 13]. З сучасним станом теорії майже періодичних функцій можна ознайомитись в оглядах [3; 6; 21].

У цій роботі вивчаються достатні умови, при виконанні яких гладкі відносно оператора диференціювання майже періодичні функції з простору Безиковича $\mathbb{B}^2$ є майже періодичними за Бором або аналітичними майже періодичними функціями. Деяко близькі питання розглядались в [20].

Нагадаємо, що за означенням Г. Бора неперервна на $\mathbb{R}^1$ функція $f(t)$ рівномірно майже періодична, якщо для довільного додатного $\varepsilon > 0$ існує число $l = l(\varepsilon)$, таке, що в кожному інтервалі $(a, a + l)$ існує хоча б одне число τ , таке, що

$$|f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1.$$

Число τ називають ε майже періодом функції $f(t)$. Надалі такі функції будемо називати майже періодичними за Бором. З цього означення випливає, що майже періодичні функції за Бором обмежені та рівномірно неперервні на $\mathbb{R}^1$.

Для визначення більш широкого класу майже періодичних функцій, а саме простору Безиковича $\mathbb{B}^2$ [9] розглянемо множину Λ всіх можливих скінченних лінійних комбінацій $f(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k t}$ уявних експонент

$$e^{i\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}^1 \quad (1)$$

де $a_k \in \mathbb{C}^1$, $\lambda_k \in \mathbb{R}^1$, $n \in \mathbb{N}$.

Для функцій $f, g \in \Lambda$ визначимо скалярний добуток

$$(f, g)_{\mathbb{B}^2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (2)$$

Простір Безиковича $\mathbb{B}^2$ є поповненням Λ відносно скалярного добутку (2). Простір $\mathbb{B}^2$ є несепарабельним гільбертовим простором. Функції з $\mathbb{B}^2$ будемо надалі називати майже періодичними за Безиковичем.

Система функцій (1) утворює в просторі $\mathbb{B}^2$ континуальний ортонормований базис, оскільки для всіх $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^1$ таких, що $\lambda \neq \mu$

$$\begin{aligned}
 (e^{i\lambda t}, e^{i\mu t})_{\mathbb{B}^2} &= \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i\lambda t} e^{-i\mu t} dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i(\lambda-\mu)t} dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{i(\lambda-\mu)} \cdot \\
 &\quad \cdot \left(e^{i(\lambda-\mu)T} - e^{-i(\lambda-\mu)T} \right) = \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\sin((\lambda-\mu)T)}{(\lambda-\mu)T} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.
 \end{aligned}$$

Відповідно при $\lambda = \mu$ маємо

$$\begin{aligned}
 (e^{i\lambda t}, e^{i\mu t})_{\mathbb{B}^2} &= \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{i\lambda t} e^{i\lambda t} dt = \\
 &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt = 1.
 \end{aligned}$$

Таким чином:

$$(e^{i\lambda t}, e^{i\mu t})_{\mathbb{B}^2} = \delta_{\lambda\mu} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \lambda \neq \mu, \\ 1, & \text{якщо } \lambda = \mu. \end{cases}$$

Кожна функція $f(t) \in \mathbb{B}^2$ розкладається у ряд Фур'є за функціями $e^{i\lambda t}$ із системи (1)

$$f(t) = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}^1} a_{\lambda} e^{i\lambda t}, \quad a_{\lambda} = a_{\lambda}(f) = (f, e^{i\lambda t})_{\mathbb{B}^2}.$$

Для кожної функції $f \in \mathbb{B}^2$ у цьому ряді не більш ніж зліченна кількість доданків. Отже, ряд (1) для кожної функції з $\mathbb{B}^2$ має вигляд

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{i\lambda_k t}, \quad (3)$$

де $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — деяка послідовність попарно різних дійсних чисел $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 < +\infty$.

Для того, щоб функція $f(t)$ була майже періодичною за Бором, достатньо, щоб її ряд Фур'є (3) збігався абсолютно.

На многовиді Λ визначимо диференціальний оператор

$$\tilde{A} = i \frac{d}{dt}.$$

Покажемо, що цей оператор симетричний на Λ . Нехай $f(t)$ і $g(t)$ довільні функції з Λ . Тоді, проінтегрувавши частинами, отримаємо

$$\begin{aligned}
 &\int_{-T}^T \left(i \frac{d}{dt} f(t) \right) \overline{g(t)} dt = \\
 &= i \int_{-T}^T f'(t) \overline{g(t)} dt = \\
 &= \Delta(f, g, T) - i \int_{-T}^T f(t) \overline{g'(t)} dt = \\
 &= \Delta(f, g, T) + \int_{-T}^T f(t) \overline{i g'(t)} dt,
 \end{aligned}$$

$$\text{де } \Delta(f, g, T) = i(f(T)\overline{g(T)} - f(-T)\overline{g(-T)}).$$

Оскільки уявні експоненти $e^{i\lambda t}$ мають одиничні модулі, то з нерівності Коші–Буняковського отримаємо:

$$\begin{aligned}
 |\Delta(f, g, T)| &= 2 \max_{t \in \mathbb{R}^1} |f(t) \overline{g(t)}| = \\
 &= \max_{t \in \mathbb{R}^1} \left| \left(\sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k t} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k e^{i\lambda_k t} \right) \right| \leq \\
 &\leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \|f\|_{\mathbb{B}^2} \cdot \|g\|_{\mathbb{B}^2}.
 \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \Delta(f, g, T) = 0,$$

а отже, і симетричність оператора $\tilde{A}$, тобто $(\tilde{A}f, g)_{\mathbb{B}^2} = (f, \tilde{A}g)_{\mathbb{B}^2}$.

Оскільки експоненти (3) — власні функції оператора $\tilde{A}$ (тобто $\tilde{A}e^{i\lambda t} = \lambda e^{i\lambda t}$, для кожного $\lambda \in \mathbb{R}^1$), оператор $\tilde{A}$ допускає самоспряжене розширення A , для якого область визначення $D(A)$ складається з усіх функцій $f(t)$ із простору $\mathbb{B}^2$, для яких коефіцієнти a_k розкладу в ряд Фур'є задовольняють умову

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 \cdot |a_k|^2 < +\infty. \quad (4)$$

Звідси випливає, що для $m \in \mathbb{N}$ належність $f \in \mathbb{B}^2$ до $D(A^m)$ означає

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^{2m} \cdot |a_k|^2 < +\infty. \quad (5)$$

Виділимо в просторі Безиковича $\mathbb{B}^2$ сепарабельний підпростір T -періодичних функцій $f(t)$, для яких $f(t+T) = f(t)$, де $T > 0$ — фіксоване число. Цей підпростір можна ототожнити з сепарабельним гільбертовим простором $L_2(0, T)$, оскільки скалярний добуток (2) на T -періодичних функціях збігається зі скалярним добутком у $L_2(0, T)$

$$(f, g)_{L_2(0, T)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Звуження A_T оператора A на $L_2(0, T)$ має ортонормований власний базис

$$\left\{ e^{\frac{2\pi i n t}{T}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} : \\ A_T e^{\frac{2\pi i n t}{T}} = i \frac{d}{dx} e^{\frac{2\pi i n t}{T}} = -\frac{2\pi}{T} n e^{\frac{2\pi i n t}{T}}.$$

Область визначення $D(A_T)$ збігається з частиною простору Соболева $W_2^1[0, T]$ [4] зі скалярним добутком

$$(f, g)_{W_2^1[0, T]} = (f, g)_{L_2[0, T]} + (f', g')_{L_2[0, T]};$$

$D(A_T)$ утворює в просторі Соболева $W_2^1[0, T]$ замкнений підпростір корозмірності 1. Згідно з теоремою про вкладення [11] функції $D(A_T) \subset W_2^1[0, T]$ абсолютно неперервні.

Наступна теорема узагальнює теорему Соболева про вкладення на функції $f \in \mathbb{B}^2$, для яких послідовність показників $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ має степеневу асимптотику

$$|\lambda_n| = Ln^\alpha(1 + \varepsilon_n), \quad L, \alpha > 0. \quad (6)$$

Теорема 1. Якщо показники $\lambda_n, n \in \mathbb{Z}$ функції $f(t)$ мають за $n \rightarrow +\infty$ асимптотику (6) і $f \in D(A^m)$, $m > \frac{1}{2\alpha}$, то ряд Фур'є функції $f(t)$ є рівномірно збіжним, а $f(t)$ є майже періодичною за Бором.

Доведення. Оцінимо зверху залишок ряду Фур'є

$$r_N(f, t) = \sum_{|n| > N} a_n e^{-i\lambda_n t}$$

для функції $f \in D(A^m)$ за допомогою нерівності Коші—Буняковського:

$$\begin{aligned} |r_N(f, t)| &\leq \\ &\leq \left(\sum_{|n| > N} \lambda_n^{2m} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{|n| > N} \frac{1}{\lambda_n^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|A^m f\|_{\mathbb{B}^2} \cdot \left(\sum_{|n| > N} \frac{1}{\lambda_n^{2m}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Сума

$$\sum_{|n| > N}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2m}}$$

прямує до нуля за $N \rightarrow +\infty$, оскільки внаслідок (6) її можна оцінити зверху залишком суми збіжного ряду

$$C \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha m}},$$

константа C залежить від m, L, α та $\max_{n \in \mathbb{Z}} |\varepsilon_n|$,

$$2\alpha m > 2\alpha \cdot \frac{1}{2\alpha} = 1.$$

Таким чином, ряд Фур'є функції $f(t)$ є рівномірно і абсолютно збіжним на $\mathbb{R}^1$, а отже функція $f(t)$ є майже періодичною за Бором. Теорему доведено.

Для ілюстрації доведеної теореми розглянемо функцію

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{6}{5}}} e^{-in^{\frac{1}{6}} t}.$$

Ця функція майже періодична за Безиковичем, оскільки

$$\|f\|_{\mathbb{B}^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{6}{5}}} \right)^2 = \zeta\left(\frac{12}{5}\right) < +\infty.$$

$f(t)$ майже періодична за Бором, оскільки вона оцінюється зверху збіжним рядом

$$|f(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{6}{5}}} = \zeta\left(\frac{6}{5}\right) < +\infty.$$

Показники $\lambda_n = n^{\frac{1}{6}}$ мають за $n \rightarrow +\infty$ асимптотику (6) з параметрами $\alpha = \frac{1}{6}$, $L = 1$, $\varepsilon_n = 0$. Визначимо, за яких m $f \in D(A^m)$.

$$\|f\|_{\mathbb{B}^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{m}{6}} \frac{1}{n^{\frac{6}{5}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{m}{3} - \frac{12}{5}}.$$

Цей ряд є збіжним, якщо $\frac{m}{3} - \frac{12}{5} < -1$. Звідси отримаємо $0 < m < \frac{21}{5}$.

Оскільки

$$\frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{6}} = 3 < \frac{21}{5},$$

то для $f(t)$ справедлива теорема 1 за $m = 4$.

Доведена теорема буде також справедливою і для функцій, майже періодичних за Безиковичем, якщо послідовність модулів їхніх показників $|\lambda_n|$ зростає за $|n| \rightarrow +\infty$ швидше, ніж довільний додатний степінь $|n|$. Так, за показників

$$\lambda_n = Lq^n(1 + \varepsilon_n), \quad (7)$$

де $n \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $L \in \mathbb{R}^1$, $L \neq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$ для $f \in D(A)$ маємо

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n q^n|^2 < +\infty, \quad |a_n| < C q^{-n}$$

за деякого $C > 0$. Звідси випливає абсолютна збіжність ряду Фур'є такої функції та відповідно її майже періодичність за Бором.

Для вказаних показників типу (7) ряд Фур'є

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} e^{i\lambda_n t}$$

рівномірно збігається до майже періодичної за Бором функції, яка неперервна, але недиференційована функцією, як і відома функція Веєрштрасса [19]

$$w(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n e^{iq^n t},$$

де $q > 1 > a > q^{-1}$.

Розглянемо майже періодичні функції з $\mathbb{B}^2$, у яких послідовність показників λ_n прямує до нескінченності повільніше будь-якого додатного степеня n . Належність такої функції до перетину

$$\bigcap_{m=1}^{+\infty} D(A^m)$$

областей визначення всіх натуральних степенів оператора A не є достатньою умовою її неперервності. Необхідною (але не достатньою) умовою майже періодичності за Бором є аналітичність цієї функції відносно оператора A в $\mathbb{B}^2$, тобто збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|A^n f\| \sigma^n < +\infty$$

за деякого додатного σ [7; 12; 14] й існування аналітичного продовження в комплексну площину.

Обмежимося розглядом майже періодичних функцій $f(s)$, $s = \sigma + it$, аналітичних у деякій півплощині $\sigma \geq \sigma_0$. Нагадаємо, що голоморфну в півплощині $\sigma \geq \sigma_0$ функцію $f(s)$ називають аналітичною майже періодичною функцією [16], якщо для довільного додатного $\varepsilon > 0$ існує таке $l(\varepsilon)$, що в кожному інтервалі $(a, a + l(\varepsilon))$, $a \in \mathbb{R}^1$ існує хоча б одне число τ , таке, що

$$|f(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon$$

для усіх s із півплощини $\operatorname{Re} s = \sigma \geq \sigma_0$. Відповідно, за кожного фіксованого $\sigma \geq \sigma_0$ функція

$f(\sigma + it)$ майже періодична за Бором за змінною t . До того ж число τ — майже період одночасно для всіх $\sigma \geq \sigma_0$.

Для аналітичних у півплощині $\operatorname{Re} s \geq \sigma_0$ майже періодичних функцій розглядають розвинення в ряд Діріхле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n (it + \sigma)},$$

де λ_n — монотонно зростаюча послідовність додатних чисел.

За кожного фіксованого $\sigma \geq \sigma_0$ ряд Діріхле можливо переформатувати в ряд Фур'є функції $f(\sigma + it)$:

$$f(\sigma + it) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\sigma) e^{i\lambda_n t}, \quad b_n(\sigma) = a_n e^{-\lambda_n \sigma}.$$

Для послідовності показників $\lambda_n = \ln n$ ряди Діріхле

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-s \ln n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\sigma} \cdot n^{-it}$$

збігаються до аналітичної майже періодичної функції $f(s)$ у півплощині $\operatorname{Re} s \geq \sigma_0$, якщо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma_0}}$$

збігається абсолютно.

До таких функцій відносять дзета-функцію Рімана [18]:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Її ряд Діріхле абсолютно збігається у відкритій півплощині $\operatorname{Re} s > 1$. Отже, $\zeta(s)$ — аналітична майже періодична функція в замкнутих півплощинах $\operatorname{Re} s \geq 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

За $\operatorname{Re} s = \sigma \in (\frac{1}{2}, 1]$, функція $\zeta(s)$ майже періодична за Безиковичем за змінною $t = \operatorname{Im} s$, оскільки ряд квадратів модулів коефіцієнтів Фур'є за $\sigma > \frac{1}{2}$ збіжний:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}} = \zeta(2\sigma) < +\infty.$$

Оскільки в точці $s = 1$ функція Рімана має полюс 1-го порядку [18], то для дослідження $\zeta(s)$ за $0 < \sigma \leq 1$ Л. Ойлер помножив $\zeta(s)$ на цілу періодичну функцію $\eta(s) = 1 - 2^{1-s}$. Оскільки $\eta(1) = 0$, для добутку $\tilde{\zeta}(s) = \eta(s)\zeta(s)$ точка

$s = 1$ виявилася регулярною точкою. Ряд Діріхле для $\tilde{\zeta}(s)$ має вигляд:

$$\tilde{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}. \quad (8)$$

Цей ряд абсолютно збіжний за $\sigma > 1$. Покажемо, що (8) умовно збіжний за $0 < \sigma \leq 1$. За $s = 1$ й $0 < \sigma \leq 1$ маємо збіжний знакозмінний ряд Лейбніца. Зробимо в ряді (8) перегрупування

$$\tilde{\zeta}(s) = - \sum_{k=1}^{+\infty} ((2k)^{-s} - (2k-1)^{-s}). \quad (9)$$

Доданками в ряді (9) є різниці Δ_k значень комплекснозначної функції u^{-s} дійсної змінної u в точках $u = 2k$ і $u = 2k-1$, $k = 1, +\infty$.

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} (u^{-s}) &= -su^{-s-1} = \\ &= -su^{-\sigma-1} (\cos(t \ln u) - i \sin(t \ln u)), \end{aligned}$$

то, застосувавши до дійсних та уявних частин цих різниць теорему Лагранжа, отримаємо для них оцінки:

$$|\Delta_k| \leq 2|s| \cdot k^{-\sigma-1}. \quad (10)$$

Оскільки $\sigma + 1 > 1$, то ряд (9) абсолютно збіжний за $\sigma > 0$, а ряд (8) умовно збіжний за $0 < \sigma \leq 1$. За $0 < \sigma \leq 1$ ряди (8) і (9) збігаються в смугі $0 < \sigma \leq 1$ нерівномірно, тому що множник $|s|$ в оцінці (10) необмежений, але збіжність рядів (8) й (9) рівномірна на компактних підмножинах смуги $0 < \sigma \leq 1$. Звідси випливає, що в смугі $0 < \sigma \leq 1$ функції $\zeta(s)$ і $\tilde{\zeta}(s)$ не майже періодичні за Бором, проте вони голоморфні у цій смугі.

У наступній теоремі властивості $\tilde{\zeta}(s)$ узагальнені на досить широкий клас голоморфних майже періодичних функцій.

Теорема 2. Для довільної строго монотонно зростаючої послідовності додатних чисел $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\lambda_n \rightarrow +\infty$ ряд Діріхле

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n s} \quad (11)$$

умовно збігається у півплощині $\operatorname{Re} s > 0$ до голоморфної функції $\varphi(s)$. Ця збіжність рівномірна в секторах

$$|\arg(s - \varepsilon)| \leq \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Крім того:

а) Якщо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} = \alpha > 0,$$

то за $\sigma > \frac{1}{2\alpha}$ функція $\varphi(\sigma + it)$ за змінною t майже періодична за Безиковичем. А в півплощинах $\sigma > \frac{1}{\alpha} + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ ряд (11) збігається абсолютно й рівномірно, а $\varphi(s)$ — аналітична майже періодична функція.

б) Якщо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} = +\infty,$$

то для будь-якого $\varepsilon > 0$ ряд (11) збігається абсолютно й рівномірно в півплощині $\sigma > \varepsilon$. У цій півплощині $\varphi(s)$ є аналітичною майже періодичною функцією.

в) Якщо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{\ln n} = 0,$$

то для усіх s , таких, що $\sigma > 0$, ряд (11) є розбіжним абсолютно, і за кожного $\sigma > 0$ функція $\varphi(\sigma + it)$ не є майже періодичною за Безиковичем.

Доведення. За $s = \varepsilon$, ε довільне мале додатне число, ряд (11)

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n \varepsilon}$$

є альтернуючим рядом Лейбніца, а отже є умовно збіжним. Тоді за узагальненням теореми Абеля на випадок рядів Діріхле [17] ряд (11) умовно збігається в півплощині $\operatorname{Re} s > 0$. У кожному секторі

$$|\arg(s - \varepsilon)| \leq \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

збіжність є рівномірною.

Враховуючи, що $\varepsilon > 0$ довільне, маємо умовну збіжність у півплощині $\operatorname{Re} s > 0$.

Для доведення пунктів а)–в) оцінимо модулі доданків $e^{-\lambda_n s}$ ряду (11) й дослідимо його на абсолютну збіжність і збіжність суми квадратів його модулів.

У випадку а) для достатньо великих n

$$\lambda_n > (\alpha - \varepsilon) \ln n, \quad \varepsilon > 0,$$

$$|e^{-\lambda_n s}| \leq e^{-\sigma(\alpha - \varepsilon) \ln n} = n^{-\sigma(\alpha - \varepsilon)}.$$

Тоді за $\sigma > \frac{1}{2\alpha}$ й достатньо малого $\varepsilon > 0$, й деякого $C > 0$

$$|e^{-\lambda_n s}| \leq C n^{-\sigma(\alpha - \varepsilon)} \leq C n^{-\frac{1}{2} - \varepsilon_1},$$

де $\varepsilon_1 > 0$. Звідси випливає збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |e^{-\lambda_n s}|^2 < +\infty.$$

Отже, за $\sigma > \frac{1}{2\alpha}$ функція $\varphi(\sigma + it)$ є майже періодичною за Безиковичем за змінною t . Аналогічно, за $\sigma > \frac{1}{\alpha}$ отримаємо:

$$|e^{-\lambda_n s}| \leq C n^{-1-\varepsilon_1}.$$

Тоді в півплощині $\sigma > \frac{1}{\alpha}$ ряд (11) абсолютно збіжний, у півплощинах $\sigma > \frac{1}{2\alpha} + \varepsilon$ збіжність рівномірна, а $\varphi(s)$ — аналітична майже періодична функція.

У випадку б) за великих n і довільного $M > 0$

$$\lambda_n > M \ln n.$$

Тоді для $\sigma < \varepsilon$, де ε — як завгодно мале додатне число, будемо мати

$$|e^{-\lambda_n s}| < C n^{-1-\varepsilon_1}$$

за деяких додатних $C > 0$ і $\varepsilon_1 > 0$.

Тоді ряд (11) абсолютно збіжний у півплощині $\sigma > 0$. До того ж для будь-якого $\varepsilon > 0$ у півплощинах $\sigma > \varepsilon$ збіжність рівномірна, а $\varphi(s)$ — аналітична майже періодична функція.

У пункті в) навпаки за великих n і довільних малих $\varepsilon > 0$ маємо

$$\lambda_n < \varepsilon \ln n.$$

Звідси випливає, що за довільних $\sigma > 0$, існують додатні константи C і $\varepsilon_1 > 0$, такі, що

$$|e^{-\lambda_n s}| \geq C n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_1}.$$

Звідси випливає абсолютна розбіжність ряду (11) у півплощині $\operatorname{Re} s > 0$, а також розбіжність суми квадратів модулів членів ряду (11). Отже, за жодного $\sigma > 0$ функція $\varphi(s)$ не майже періодична за Безиковичем. Теорему доведено.

У розглянутих раніше закладах майже періодичні за Безиковичем функції є голоморфними або мероморфними. Так, $\zeta(s)$ має один простий полюс [18]:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \zeta_0(s),$$

де $\zeta_0(s)$ — ціла функція від s . Похідні

$$\zeta^{(m)}(s) = \frac{(-1)^m m!}{(s-1)^{m+1}} + \zeta_0^{(m)}(s), \quad m \in \mathbb{N}$$

мають у точці $\sigma = 1$ полюс $m + 1$ -го порядку. Розвинення в ряд Діріхле для $\zeta^{(m)}(s)$ має вигляд

$$\zeta^{(m)}(s) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^m}{n^s}.$$

З цього розвинення випливає, що за всіх натуральних m і $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ похідні $\zeta^{(m)}(s)$ є майже періодичними за Безиковичем, а за $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$ аналітичними майже періодичними функціями. Така властивість, очевидно, зберігається й за зсуву аргументу вздовж уявної вісі, тобто для функцій $\zeta(s - ia)$ і $\zeta^{(m)}(s - ia)$, $a \in \mathbb{R}^1$.

Нехай $\{t_j\}_{j=0,+\infty}$ — послідовність попарно різних дійсних чисел, яка скрізь щільна в $\mathbb{R}^1$. Розглянемо ряд з функціями $\zeta(s - t_j)$

$$\Phi(s) = \sum_{j=0}^{+\infty} 3^{-j} \zeta(s - it_j), \quad (12)$$

якому відповідає ряд Діріхле

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} k(n) \cdot n^{-s}, \quad \text{де } k(n) = \sum_{j=0}^{\infty} 3^{-j} \cdot n^{it_j}.$$

Оскільки $\sum_{j=1}^{+\infty} 3^{-j} = \frac{1}{2}$, то

$$\frac{1}{2} \leq |k(n)| \leq \frac{3}{2}$$

для усіх натуральних n . Звідси випливає збіжність за нормою $\mathbb{B}^2$ ряду (12) за $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ і абсолютна збіжність за $\operatorname{Re} s > 1$.

У смузі $\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < 1$ і півплощині $\operatorname{Re} s > 1$ сума ряду $\Phi(s)$ — голоморфна функція. Оскільки в точках $1 - it_j$ функції $\zeta(s - it_j)$ мають простий полюс і точки $1 - it_j$ утворюють на прямій $\operatorname{Re} s = 1$ скрізь щільну множину, то за наближення значень s до цієї прямої значення $\Phi(s)$ необмежено зростають:

$$\lim_{\sigma \rightarrow +1} \Phi(\sigma + it) = \infty.$$

Звідси випливає, що за підходу до прямої $\operatorname{Re} s = 1$ функція $\Phi(s)$ має границю в класі узагальнених функцій [5]. Внаслідок цього, на всій прямій $\operatorname{Re} s = 1$ функція $\Phi(1 + it)$ є узагальненою сингулярною функцією, оскільки не має жодної точки неперервності. Отже, ми отримали узагальнену сингулярну функцію, яка одночасно майже періодична за Безиковичем. Похідні $\Phi^{(m)}(1 + it)$, $m \in \mathbb{N}$ у сенсі теорії узагальнених функцій [8] також будуть належати до $\mathbb{B}^2$.

Іншого типу цікаві явища маємо за дослідженні майже періодичних функцій з показниками λ_n , які монотонно прямують до нуля. За

великих n уявні експоненти $e^{i\lambda_n t}$ системи (1) мають асимптоти

$$e^{i\lambda_n t} = 1 + \varepsilon_n(t), \text{ де}$$

$$\varepsilon_n(t) = i\lambda_n t + O((\lambda_n t)^2).$$

Оскільки послідовність $\varepsilon_n(t)$ прямує до нуля рівномірно за $t \in [-A, A]$ за кожного $A > 0$, то на цих інтервалах ряди Фур'є

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$$

будуть збігатися або розбігатися одночасно із числовим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Якщо показники λ_n функції $f \in \mathbb{B}^2$ монотонно прямують до нуля, то й усі її похідні $f^{(m)}, m \in \mathbb{N}$ також належать до $\mathbb{B}^2$, причому ряди Фур'є для похідних

$$f^{(m)}(t) = i^m \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n^m e^{i\lambda_n t}$$

збігаються швидше, ніж ряд Фур'є самої $f(t)$. У той же час ряд Фур'є первісної від f

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n^{-1} e^{i\lambda_n t}$$

збігається повільніше, ніж її ряд Фур'є.

Так, наприклад, за $\lambda_n = \frac{1}{n}$ майже періодична за Безиковичем функція

$$h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{it}{n}}$$

за $t = 0$ має розбіжний ряд Фур'є, оскільки утворений з її коефіцієнтів числовий ряд є гармонічним рядом

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Виявляється, що ряди Фур'є похідних

$$h^{(m)}(t) = i^m \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{m+1}} e^{\frac{it}{n}}$$

збігаються абсолютно на усій дійсній осі. Збіжність є рівномірною на компактах з $\mathbb{R}^{\mathbb{K}}$.

Оскільки

$$h^{(m)}(0) = i^m \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{m+1}} = i^m \zeta(m+1)$$

$$1 < \zeta(m+1) < \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2,$$

то $h'(t)$ має аналітичне продовження в комплексну площину до цілої функції першого порядку і має розвинення в ряд Тейлора

$$h'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^m \zeta(m+1)}{(m-1)!} s^{m-1}$$

в околі точки $s = 0$ з нескінченним радіусом збіжності.

Звідси випливає, що й сама функція має аналітичне продовження до цілої функції першого порядку [15; 17], ряд Тейлора якої має вигляд

$$h(s) = h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^m \zeta(m+1)}{m!} s^m,$$

де значення $h(0)$ невідоме.

У наступному твердженні описано достатньо широкий клас функцій типу $h(t)$.

Теорема 3. *Якщо для функції $f \in \mathbb{B}^2$ показники λ_n функції монотонно прямують до нуля й мають за великих n степеневу асимптотику*

$$\lambda_n = L n^{-\alpha} (1 + \varepsilon_n), \quad (13)$$

де $\alpha > 0$, L відмінна від нуля дійсна константа, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ за $n \rightarrow +\infty$, то функція f має аналітичне продовження до цілої функції першого порядку.

Доведення. Для функції $f \in \mathbb{B}^2$ з показниками λ_n , що задовольняють асимптотиці (13), за

$$m > \frac{1}{2\alpha} \quad (14)$$

ряди Фур'є, що відповідають похідним

$$f^{(m)}(x) = i^m \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n^m e^{-i\lambda_n x}$$

є абсолютно збіжними, оскільки з нерівності Коші-Буняковського будемо мати

$$\begin{aligned} & \left| i^m \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \lambda_n^m e^{-i\lambda_n x} \right| \leq \\ & \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq CL^m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha m}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_{\mathbb{B}^2} = \\ & = CL^m (\zeta(2\alpha m))^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_{\mathbb{B}^2}, \end{aligned}$$

де $C > 0$ — деяка константа. Отже, функція $f(x)$ нескінченно диференційовна й за $m > \frac{1}{2\alpha}$ її похідні $f^{(m)}(x)$ рівномірно обмежені геометричною прогресією відносно m : $|f^{(m)}| < C_1 L^m$. Звідси випливає, що $f^{(m_0)}(x)$ (m_0 — найменше значення m , для якого виконується (14)) має аналітичне продовження до цілої функції першого порядку [15; 17]. У такому разі сама функція $f(x)$ також буде цілою функцією першого порядку. Теорему доведено.

Якщо показники λ_n функції $f \in \mathbb{B}^2$ монотонно прямує до нуля повільніше $n^{-\alpha}$ для усіх $\alpha > 0$, тобто $0 < \lambda_n < Cn^{-\alpha}$, де $C > 0$ залежить від α , то ряди Фур'є для $f(t)$ й для усіх її похідних можуть розбігатися. Таке має місце, наприклад, за $\lambda_n = \frac{1}{\ln n}$, $n \geq 2$, для функції

$$f(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{\frac{it}{\ln n}}}{\sqrt{n \ln n}}.$$

Цей ряд Фур'є та ряди Фур'є усіх похідних

$$f^{(m)}(t) = i^m \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{\frac{it}{\ln n}}}{\sqrt{n}(\ln n)^{m+1}}$$

розбіжні.

Наостанок наведемо приклади майже періодичних функцій двох змінних, які подібні роз-

глянутій перед теоремою 3 цілій функції $h(s)$ і дзета-функції Рімана $\zeta(s)$:

$$\mu(s_1, s_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{s_1}{n}}}{n^{s_2}}, \quad (15)$$

$$\tilde{\mu}(s_1, s_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{\frac{s_1}{n}}}{n^{s_2}}. \quad (16)$$

Ряди (15) і (16) збігаються абсолютно за $\operatorname{Re} s_1 \geq 0$ і $\operatorname{Re} s_2 > 1$, причому $\mu(0, s_2) = \zeta(s_2)$, $\tilde{\mu}(0, s_2) = \tilde{\zeta}(s_2)$, $\mu(s_1, 1) = h(s_1)$.

За $\operatorname{Re} s_1 \geq 0$ і $0 < \operatorname{Re} s_2 \leq 1$ ряд (16) збігається умовно. Оскільки $(s-1)\zeta(s)$, $\tilde{\zeta}(s)$ і $h(s)$ цілі функції, то $(s-1)\mu(s_1, s_2)$ і $\tilde{\mu}(s_1, s_2)$ — цілі функції двох змінних. Ці функції задовольняють диференціальному рівнянню з частинною похідною за змінною s_1 та зсувом за аргументом s_2 :

$$\frac{\partial u(s_1, s_2)}{\partial s_1} = u(s_1, s_2 + 1).$$

Автори висловлюють щире подяку члену-кореспонденту НАН України А.Н. Кочубею за корисні зауваження і поради.

Список літератури

1. Besicovitch A., Bohr H. Almost periodicity and generalized trigonometric series. *Acta Mathematica*. 1931. No. 57. Pp. 203–291.
2. Bohr H. Zur theorie der fastperiodischen funktionen i. *Acta Mathematica*. 1925. No. 45. Pp. 29–127.
3. Wei-Shih Du, Kostic' M., Pinto M. Almost periodic functions and their applications: A survey of results and perspectives. *Hindawi Journal of Mathematics*. 2021. Article ID 5536018:21. <https://doi.org/10.1155/2021/5536018>.
4. Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L. Boundary value problems for operator differential equations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht etc., 1991.
5. Kothe G. Die randwerte einer analytischen funktionen. *Mathematische Zeitschrift*. 1952. No. 57. S. 13–33.
6. Lassoued Dhaou. Almost periodic and quasi-periodic functions. a brief survey and some applications. *Surveys in Mathematics and its Applications*. 2024. No. 19. Pp. 79–107. URL: <https://www.utgjiu.ro/math/sma>.
7. Nelson E.. Analytic vectors. *Annals of Mathematics*. 1959. No. 70. Pp. 572–615.
8. Schwartz L. Théorie des distributions à valeurs vectorielles. *Annales de l'Institut Fourier*. 1957. No. 7. Pp. 1–141.
9. Akhiezer N. I., Glazman I. M. Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Moscow : Nauka, 1966.
10. Bari N. K. Trigonometric Series. Moscow : Fizmatgiz, 1961.
11. Berezansky Yu. M. Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators. Kiev : Naukova Dumka, 1965.
12. Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L. On the approximation of smooth vectors of a closed operator by entire vectors of exponential type. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1995. No. 47 (5). Pp. 616–628.
13. Edwards R. Fourier Series: A Modern Introduction. Vol. 1. Moscow : Mir Publishers, 1985.
14. Kashpirovskiy O. I., Mytnyk Yu. V. Approximation of solutions of operator-differential equations by operator polynomials. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1998. No. 50 (11). Pp. 1506–1516.
15. Levin B. Ya. Distribution of Zeros of Entire Functions. Moscow : GITTL, 1956.
16. Levitan B. M. Almost Periodic Functions. Moscow : GITTL, 1953.
17. Leont'ev A. F. Entire Functions. Series of Exponents. Moscow : Nauka, 1983.
18. Titchmarsh E. C. The Theory of the Riemann Zeta-Function. Moscow : Foreign Literature Publishing House, 1953.
19. Fikhtengol'ts G. M. Course in Differential and Integral Calculus. Vol. 2. Moscow : FIZMATLIT, 2003.
20. Khasanov Yu. Kh. On the embedding conditions of Besicovitch almost periodic function classes. *Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2021. No. 23 (1). Pp. 88–99. <https://doi.org/10.46698/b5144-7328-6245-w>.
21. Shubin M. A.. Almost periodic functions and partial differential operators. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*. 1978. No. 33 (2). Pp. 3–47. URL: <https://www.mathnet.ru/rm3388>.

References

1. A. Besicovitch and H. Bohr, *Acta Mathematica*. **57**, 203–291 (1931).
2. H. Bohr, *Acta Mathematica*. **45**, 29–127 (1925).
3. Wei-Shih Du, M. Kostic', and M. Pinto, *Hindawi Journal of Mathematics*, Article ID 5536018:21 (2021). <https://doi.org/10.1155/2021/5536018>.
4. V. I. Gorbachuk and M. L. Gorbachuk, *Boundary value problems for operator differential equations* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht etc., 1991).
5. G. Kothe, *Mathematische Zeitschrift*. **57**, 13–33 (1952).
6. Dhaou Lassoued, *Surveys in Mathematics and its Applications*. **19**, 79–107 (2024). <https://www.utgjiu.ro/math/sma>.
7. E. Nelson, *Annals of Mathematics*. **70**, 572–615 (1959).
8. L. Schwartz, *Annales de l'Institut Fourier*. **7**, 1–141 (1957).
9. N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of Linear operators in Hilbert Space* (Nauka, Moscow, 1966).
10. N. K. Bari, *Trigonometric Series* (Fizmatgiz, Moscow, 1961).
11. Yu. M. Berezansky, *Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators* (Naukova Dumka, Kiev, 1965).
12. V. I. Gorbachuk and M. L. Gorbachuk, *Ukrainian Mathematical Journal*. **47** (5), 616–628 (1995).
13. R. Edwards, *Fourier Series: A Modern Introduction*. Vol. 1 (Mir Publishers, Moscow, 1985).
14. O. I. Kashpirovskiy and Yu. V. Mytnyk, *Ukrainian Mathematical Journal*. **50** (11), 1506–1516 (1998).
15. B. Ya. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions* (GITTL, Moscow, 1956).
16. B. M. Levitan, *Almost Periodic Functions* (GITTL, Moscow, 1953).
17. A. F. Leont'ev, *Entire Functions. Series of Exponents* (Nauka, Moscow, 1983).
18. E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function* (Foreign Literature Publishing House, Moscow, 1953).
19. G. M. Fikhtengol'ts, *Course in Differential and Integral Calculus*. Vol. 2 (FIZMATLIT, Moscow, 2003).
20. Yu. Kh. Khasanov, *Vladikavkaz Mathematical Journal*. **23** (1), 88–99 (2021). <https://doi.org/10.46698/b5144-7328-6245-w>.
21. M. A. Shubin, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*. **33** (2), 3–47 (1978). URL: <https://www.mathnet.ru/rm3388>.

O. Kashpirovskiy, Yu. Mytnyk

ON SOME PROPERTIES OF ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

This paper explores conditions for exponents λ_n and coefficients of Fourier series which, if satisfied, guarantee that the almost periodic function $f(t)$ from Besikovich space $\mathbb{B}^2$ is continuous, smooth and holomorphic.

For those exponents λ_n with polynomial asymptotics, $\lambda_n = L(n^\alpha + \varepsilon_n)$, where $L \in \mathbb{R}^1$, $\alpha > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$ the alternative for Sobolev embedding theorem is derived.

The paper also describes class of functions that can be analytically continued to half-plane $\operatorname{Re} s > a \geq 0$ from Besikovich space $\mathbb{B}^2$ with exponents λ_n which grow slower than n^c for arbitrary $c > 0$ as $n \rightarrow +\infty$. This class also includes Riemann zeta function $\zeta(s)$.

For functions from $\mathbb{B}^2$ with $\lambda_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$ sufficient conditions required to analytically continued them to entire functions of exponential first order.

Keywords: almost periodicity, Bohr, Besikovich space, Riemann zeta function, Fourier series, Dirichle series, holomorphness.

Матеріал надійшов 19.09.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)

СПЕКТРАЛЬНІ ВІДНОВЛЮВАЛЬНІ ЧИСЛА ГРАФІВ

 $C_3 + e$ ТА $K_4 - e$

У статті досліджено обернену спектральну задачу для зважених графів. Розглянуто проблему відновлення додатних ваг ребер графа за спектрами його індукованих підграфів. Основну увагу приділено знаходженню точного значення спектрального відновлювального числа $Srn(G)$ для графів $Srn(C_3 + e)$ та $Srn(K_4 - e)$ — мінімальної кількості спектрів індукованих підграфів, необхідних для однозначного відновлення всіх ваг ребер графа.

Отримані результати завершують визначення спектральних відновлювальних чисел для всіх зв'язних графів порядку не більш як чотири. Вони можуть бути використані для подальших досліджень обернених спектральних задач та розробки алгоритмів відновлення ваг на ребрах графів.

Ключові слова: спектр графа, власні числа, обернені спектральні задачі, зважений граф.

Вступ

Спектральна теорія графів є сучасним напрямом математики, що поєднує алгебраїчні, комбінаторні та геометричні методи для вивчення структурних властивостей графів (див. [1]). Її активний розвиток зумовлений широким колом застосувань у різних галузях науки — від хімії, фізики та біології до інформатики, економіки й соціальних наук (див. [2]–[4]). Спектральні характеристики графів використовуються, зокрема, у задачах розпізнавання структур, кластеризації даних, аналізу мережевої динаміки та моделювання складних систем, у машинному навчанні для покращення роботи згорткових нейронних мереж (див. [3]).

Важливою складовою спектральної теорії є обернені спектральні задачі, які передбачають відновлення структури або параметрів графа на основі спектральної інформації. Зокрема, ці задачі можна формулювати як відновлення матриці суміжності (або ваг ребер) за спектрами самої матриці чи її підматриць (див. [5]–[8]). З оглядом обернених спектральних задач можна ознайомитися за роботою [7].

Особливий інтерес становлять *обернені задачі для зважених графів*, де на множині ребер задано додатну функцію ваг. У статті [10] було вперше введено поняття *спектрального відновлювального числа графа* $Srn(G)$, а також отримано точні значення цього числа для деяких класів графів, зокрема для ланцюга ($Srn(A_n) = 2$ при $n \geq 3$) та зірки ($Srn(K_{1,n}) = n$). У роботі [11] знайдено значення цього числа для циклів C_3 ($Srn(C_3) = 3$) та C_4 ($Srn(C_4) = 4$), у статті [12] — для графа K_4 ($Srn(K_4) = 6$).

Дослідження [13], [14] надали верхні оцін-

ки $Srn(G)$ для дерев та уніциклічних графів через кількість висячих вершин. Проте навіть для графів невеликого порядку точне визначення $Srn(G)$ залишається складною задачею через її нелінійний характер і високу чутливість цього параметра до структури графа.

Метою цієї роботи є знаходження точних значень спектрального відновлювального числа для графів $C_3 + e$ (paw graph) та $K_4 - e$ (diamond graph). Використані методи ґрунтуються на узагальненій теоремі Захса та аналізі характеристикних многочленів індукованих підграфів.

Отримані результати можуть стати основою для подальших досліджень, спрямованих на визначення $Srn(G)$ для ширших класів графів.

Основні означення та твердження

У цій статті під терміном *граф* розуміємо впорядковану пару $G = (V, E)$, де V — непорожня множина вершин, а E — довільна підмножина множини всіх неупорядкованих пар різних елементів з V .

Надалі використовуємо такі позначення: $E(G)$ — множина ребер графа G , $V(G)$ — множина його вершин, (u, v) — ребро, що сполучає вершини u і v . Кількість вершин графа називають його порядком. У цій роботі розглядаємо лише графи скінченного порядку.

Означення 1. *Зваженим графом* $\mathbf{G}$ називають впорядковану пару (G, w) , де G — граф, а $w : E \rightarrow (0, +\infty)$ — вагова функція, яка кожному ребру $e \in E$ ставить у відповідність додатне число $w(e)$.

Зважений граф $\mathbf{G}$ зручно зображати у вигляді діаграми графа G , приписуючи над ко-

жним ребром e його вагу $w(e)$. У подальшому слово «зважений» часто опускатимемо, якщо з контексту зрозуміло, що йдеться саме про зважений граф.

З кожним графом $\mathbf{G} = (G, w)$ та нумерацією його вершин натуральними числами від 1 до n , де n — порядок графа, пов'язують матрицю суміжності $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, елементи якої визначаються за правилом (через w_{ij} позначається значення ваги ребра (i, j)):

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{якщо вершини } i \text{ та } j \text{ суміжні,} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Означення 2. Спектром графа $\mathbf{G}$ називають мультимножину власних значень його матриці суміжності. Позначають як $\sigma(\mathbf{G})$.

Зауважимо, що спектр зваженого графа не залежить від нумерації вершин i є його інваріантом.

Для характеристичного многочлена графа $\mathbf{G}$ будемо використовувати позначення $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \det(\lambda I - A(\mathbf{G}))$.

Для формулювання узагальненої теореми Захса введемо необхідні означення та позначення (див. [9], [13]).

Лінійним підграфом графа G називають підграф, компоненти зв'язності якого є лише пари суміжних вершин (разом із ребром, що їх з'єднує) та прості цикли. Позначимо його через H_k , де k — кількість вершин у цьому підграфі.

Під вагою компоненти зв'язності, що є парю суміжних вершин $\{i, j\}$, розуміємо w_{ij}^2 , а під вагою компоненти, що є простим циклом, — добуток значень w_{ij} по всіх ребрах циклу (i, j) .

Введемо позначення: $r(H_k)$ — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа H_k ; $c(H_k)$ — кількість компонент, що є циклами; $w(H_k)$ — вага H_k , тобто добуток ваг усіх його компонент.

Теорема 1 (Узагальнена теорема Захса, див. теорему 2.5.2. в [13]). Нехай

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^{n-k} = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_n$$

— характеристичний многочлен графа

$\mathbf{G} = (G, w)$. Тоді виконуються рівності:

$$1. \ c_1 = 0;$$

$$2. \ c_2 = - \sum_{e \in E(G)} w(e)^2;$$

$$3. \ c_k = \sum_{\{H_k\}} (-1)^{r(H_k)} 2^{c(H_k)} w(H_k), \quad \text{для } k = 1, \dots, n,$$

де сума береться по всіх лінійних підграфах H_k графа G .

Нагадаємо, що *індукований підграф* графа G — це підграф, утворений підмножиною вершин графа G разом з усіма ребрами, що сполучають ці вершини.

Означення 3. Зважений граф $\mathbf{G}_1 = (G_1, w_1)$ називають *індукованим підграфом* зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$, якщо G_1 є індукованим підграфом G , і для будь-якого ребра $e \in E(G_1)$ виконується рівність $w_1(e) = w(e)$.

Розглянемо таку обернену спектральну задачу для зважених графів. Нехай задано граф G і потрібно однозначно відновити вагову функцію w зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ за спектрами певних його індукованих підграфів. Інакше кажучи, необхідно, щоб за значеннями спектрів вибраних підграфів ваги на ребрах графа G визначалися однозначно для будь-якої вагової функції w . Спектр індукованого підграфа називатимемо *підспектром*.

Зауважимо, що задача відновлення ваг за спектрами підграфів еквівалентна задачі відновлення за характеристичними многочленами цих підграфів, оскільки за спектром зваженого графа однозначно відновлюється його характеристичний многочлен і навпаки.

Означення 4. Спектральне відновлювальне число $Srn(G)$ — це мінімальна кількість індукованих підграфів G , таких, що за спектрами відповідних зважених індукованих підграфів можна однозначно відновити вагову функцію зваженого графа $\mathbf{G}$.

Обернена спектральна задача для графа $\mathbf{C}_3 + e$

Дослідимо задачу відновлення ваг для графа $\mathbf{C}_3 + e$ та доведемо таку теорему.

Теорема 2. $Srn(\mathbf{C}_3 + e) = 3$.

Доведення. Для зручності як множину вершин оберемо множину $\{1, 2, 3, 4\}$ та позначимо ваги на ребрах графа через a_1, a_2, a_3, a_4 згідно з рис.1.

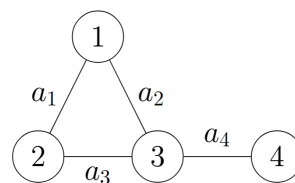


Рис. 1. Зважений граф $\mathbf{C}_3 + e$

Спочатку вкажемо трійку індукованих підграфів, за спектрами яких можна однозначно визначити всі ваги ребер графа $\mathbf{C}_3 + e$ для будь-

якої вагової функції w :

$$C_3 + e, A_3, A_2.$$

Через A_3 позначено індукований підграф із множиною вершин $\{1, 2, 3\}$, а через A_2 — індукований підграф із множиною вершин $\{1, 2\}$.

За узагальненою теоремою Захса (Теорема 1) характеристичні многочлени графа $C + e$ та його вибраних індукованих підграфів мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} P_{A_2}(\lambda) &= \lambda^2 - a_1^2; \\ P_{A_3}(\lambda) &= \lambda^3 - (a_2^2 + a_4^2)\lambda; \\ P_{C_3+e}(\lambda) &= \lambda^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)\lambda^2 - 2a_1a_2a_3\lambda + a_1^2a_4^2. \end{aligned}$$

Тоді ми можемо послідовно відновити значення усіх ваг a_1, a_2, a_3, a_4 за значеннями коефіцієнтів цих характеристичних поліномів. Спочатку знайдемо значення ваги a_1 за коефіцієнтом $-a_1^2$, потім за коефіцієнтом $a_1^2a_4^2$ знайдемо вагу a_4 , далі за коефіцієнтом $-(a_2^2 + a_4^2)$ знайдемо вагу a_2 та потім за коефіцієнтом $-(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$ знайдемо вагу a_3 .

Таким чином, усі ваги графа $C_3 + e$ можуть бути однозначно визначені за трьома підспектрами, отже, доведено таку нерівність:

$$Srn(C_3 + e) \leq 3.$$

Перейдемо до другої частини доведення Теореми 2.

Розглянемо всі типи наборів, що складаються з двох різних індукованих підграфів $C_3 + e$, з точністю до ізоморфізму графів, та для кожного такого набору підграфів покажемо, що їх спектрів недостатньо для однозначного відновлення вагової функції w зваженого графа $C_3 + e$.

Через C_3 позначається цикл довжини 3, а через A_k — ланцюг довжини $k - 1$. Число, яке стоїть перед позначенням графа, вказує на кількість таких графів у наборі.

Маємо такі 8 типів наборів:

1. $C_3 + e$;
2. $C_3 + e, A_3$;
3. $C_3 + e, A_2$;
4. C_3, A_3 ;
5. C_3, A_2 ;
6. $2A_3$;
7. A_3, A_2 ;
8. $2A_2$.

Проаналізуємо кожен тип набору та наведемо приклади двох різних вагових функцій для графа $C_3 + e$, для яких є рівними характеристичні поліноми відповідних вибраних індукованих

підграфів. Таким чином, ми доведемо, що двох підспектрів недостатньо для однозначного відновлення ваг графа $C_3 + e$. Очевидно, що з цього випливатиме, що і одного підспектра також недостатньо.

1. $C_3 + e, C_3$. Для набору підграфів першого типу наведемо приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, a_4 = d$,
 - $a_1 = a, a_2 = c, a_3 = b, a_4 = d$,
- a, b, c, d — довільні додатні числа такі, що $b \neq c$.

Характеристичні поліноми графів $C_3 + e, C_3$ для цих двох наборів ваг будуть рівними відповідно, оскільки ці графи переходять один в одного при перестановці вершин 1 та 2, а як відомо, спектр графа є його інваріантом і не залежить від нумерації його вершин.

2. $C_3 + e, A_3$. Без обмеження загальності можемо розглянути варіант вибору ланцюга A_3^1 з множиною вершин $\{1, 3, 4\}$, оскільки інший випадок розглядається аналогічно.

Розглянемо такі два різні набори ваг:

- $a_1 = 2, a_2 = \sqrt{2\sqrt{3} + 3}, a_3 = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}, a_4 = 1$,
- $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \sqrt[4]{12}, a_4 = 2$.

Характеристичні поліноми графів $C_3 + e, A_3$ для цих двох наборів ваг будуть рівними відповідно, оскільки значення виразів $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$, $a_1a_2a_3$, $a_1^2a_4^2$ та $a_2^2 + a_4^2$ для вказаних двох наборів ваг є рівними відповідно.

3. $C_3 + e, A_2$. Існують два принципово різні варіанти вибору ланцюга A_2 .

1. Ланцюг A_2 з множиною вершин $\{1, 2\}$ або $\{3, 4\}$. У цьому випадку розглянемо той самий приклад з двома різними наборами ваг, що і для першого типу набору індукованих підграфів.

2. Ланцюг A_2 з множиною вершин $\{1, 3\}$ або $\{2, 3\}$. Оскільки ці випадки аналогічні, то розглянемо перший з них. Наведемо приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$,
 - $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = 1, a_3 = a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
- a, b, c — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

Для цих двох наборів ваг характеристичні поліноми графів $C_3 + e, A_2$ будуть рівними відповідно.

4. C_3, A_3 . Без обмеження загальності можемо розглянути варіант вибору ланцюга A_3^1 з множиною вершин $\{1, 3, 4\}$, оскільки інший випадок розглядається аналогічно.

Розглянемо такі два різні набори ваг:

- $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, a_4 = d$,

- $a_1 = c, a_2 = b, a_3 = a, a_4 = d,$

a, b, c, d — довільні додатні числа такі, що

$$a \neq c.$$

Характеристичні поліноми графів $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{A}_3$ для цих двох наборів ваг будуть рівними відповідно, оскільки зважені графи $\mathbf{C}_3$ для першого та другого набору ваг переходять один в одного при перестановці вершин 1 та 3, а графи $\mathbf{A}_3$ мають одну й ту саму вагову функцію.

5. $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{A}_2$. Очевидно, що у разі вибору в ролі графа $\mathbf{A}_2$ ланцюга з множиною вершин $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ або $\{2, 3\}$, вага ребра $\{3, 4\}$ буде невизначеною.

Якщо ж як $\mathbf{A}_2$ обрано ланцюг з множиною вершин $\{3, 4\}$, то можемо розглянути той самий приклад з двома різними наборами ваг, що і для першого типу набору індукованих підграфів.

Отже, однозначне відновлення усіх ваг графа $\mathbf{C}_3 + e$ за підспектрами такого типу набору двох індукованих підграфів неможливе.

6. $2\mathbf{A}_3$; 7. $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_2$; 8. $2\mathbf{A}_2$. Для усіх таких типів наборів очевидно, що вагу принаймні одного ребра графа $\mathbf{C}_3 + e$ неможливо визначити.

Розглянуто та проаналізовано всі можливі типи наборів, що складаються з двох різних індукованих підграфів $\mathbf{C}_3 + e$. Показано, що за спектрами жодного з таких наборів підграфів неможливо однозначно відновити ваги всіх ребер графа $\mathbf{C}_3 + e$. Отже, $Srn(\mathbf{C}_3 + e) > 2$. Оскільки водночас доведено, що $Srn(\mathbf{C}_3 + e) \leq 3$, маємо $Srn(\mathbf{C}_3 + e) = 3$. Таким чином, Теорему 2 доведено.

Обернена спектральна задача для графа $\mathbf{K}_4 - e$

Також дослідимо задачу відновлення ваг для графа $\mathbf{K}_4 - e$ та доведемо теорему про спектральне відновлювальне число графа $\mathbf{K}_4 - e$.

Теорема 3. $Srn(\mathbf{K}_4 - e) = 4$.

Доведення. Як множину вершин для зручності оберемо множину $\{1, 2, 3, 4\}$ та позначимо ваги на його ребрах через a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 згідно з рис. 2.

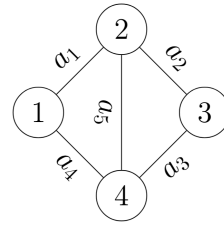


Рис. 2. Зважений граф $\mathbf{K}_4 - e$

Спочатку доведемо, що $Srn(\mathbf{K}_4 - e) \leq 4$.

Для цього достатньо вказати четвірку індукованих підграфів, за спектрами яких можна однозначно визначити всі ваги ребер графа $\mathbf{K}_4 - e$ для будь-якої вагової функції w . Це така четвірка:

$$\mathbf{K}_4 - e, \mathbf{C}_3^1, \mathbf{A}_3^1, \mathbf{A}_2^1.$$

Позначення $\mathbf{C}_3^1$, $\mathbf{A}_3^1$ та $\mathbf{A}_2^1$ відповідають індукованим підграфам з множинами вершин $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$ та $\{1, 2\}$ відповідно.

Знайдемо за узагальненою теоремою Захса (Теорема 1) характеристичні многочлени графа $\mathbf{K}_4 - e$ та його вибраних індукованих підграфів:

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{A}_2^1}(\lambda) &= \lambda^2 - a_1^2; \\ P_{\mathbf{A}_3^1}(\lambda) &= \lambda^3 - (a_1^2 + a_2^2)\lambda; \\ P_{\mathbf{C}_3^1}(\lambda) &= \lambda^3 - (a_1^2 + a_4^2 + a_5^2)\lambda - 2a_1a_4a_5; \\ P_{\mathbf{K}_4 - e}(\lambda) &= \lambda^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)\lambda^2 - \\ &\quad - 2(a_1a_4a_5 + a_2a_3a_5)\lambda + a_1^2a_3^2 + a_2^2a_4^2 - 2a_1a_2a_3a_4. \end{aligned}$$

Спочатку за $P_{\mathbf{A}_2^1}(\lambda)$ відновлюємо значення ваги a_1 . Потім за $P_{\mathbf{A}_3^1}(\lambda)$ знаходимо вагу a_2 . Далі за значеннями коефіцієнтів $-(a_1^2 + a_4^2 + a_5^2)$ та $-(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)$ поліномів $P_{\mathbf{C}_3^1}(\lambda)$ та $P_{\mathbf{K}_4 - e}(\lambda)$ визначаємо вагу a_3 . За коефіцієнтами $-2a_1a_4a_5$ та $-2(a_1a_4a_5 + a_2a_3a_5)$ цих поліномів та значеннями a_2, a_3 знаходимо значення ваги a_5 . Насамкінець за коефіцієнтом $-2a_1a_4a_5$ та значеннями a_1, a_5 визначаємо вагу a_4 .

Таким чином, усі ваги графа $\mathbf{K}_4 - e$ можуть бути однозначно відновлені за чотирма підспектрами, тому доведено нерівність

$$Srn(\mathbf{K}_4 - e) \leq 4.$$

Перейдемо до доведення неможливості однозначного відновлення ваг графа $\mathbf{K}_4 - e$ за трьома підспектрами. З цього випливатиме, що й меншої кількості підспектрів також недостатньо.

Розглянемо всі можливі типи наборів, які складаються з трьох різних індукованих підграфів $\mathbf{K}_4 - e$, з точністю до ізоморфізму графів.

Маємо 14 типів таких наборів:

1. $\mathbf{K}_4 - e, 2\mathbf{C}_3$;

2. $K_4 - e, C_3, A_3$;
3. $K_4 - e, 2A_3$;
4. $K_4 - e, C_3, A_2$;
5. $K_4 - e, A_3, A_2$;
6. $K_4 - e, 2A_2$;
7. $2C_3, A_3$;
8. $2C_3, A_2$;
9. $C_3, 2A_3$;
10. $C_3, 2A_2$;
11. C_3, A_3, A_2 ;
12. $2A_3, A_2$;
13. $A_3, 2A_2$;
14. $3A_2$.

Розглянемо усі типи наборів та наведемо приклади двох різних вагових функцій для графа $K_4 - e$, для яких відповідно рівні характеристичні поліноми вибраних індукованих підграфів, а отже і відповідні спектри рівні.

1. Проаналізуємо спочатку набори з трьох індукованих підграфів першого, другого, третього, сьомого, дев'ятого та дванадцятого типів.

Оскільки інші випадки повністю аналогічні, то без обмеження загальності можна вважати, що у другому типі набору обрано індуковані підграфи C_3^1 та A_3^1 з множинами вершин $\{1, 2, 4\}$ та $\{1, 2, 3\}$ відповідно. Також для сьомого та дев'ятого типів набору будемо вважати, що як підграфи A_3 та C_3 обрано A_3^1 та C_3^1 відповідно.

Для дванадцятого типу набору можна вважати, що як підграф A обрано індукований підграф A_2^5 з множиною вершин $\{2, 4\}$, оскільки в іншому випадку вага a_5 залишиться невизначеною.

Наведемо приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a_2 = a, a_3 = a_4 = b, a_5 = c,$
- $a_1 = a_2 = b, a_3 = a_4 = a, a_5 = c,$

a, b, c — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

Нескладно переконатися, що характеристичні поліноми зважених графів $K_4 - e$ рівні для наведених двох наборів ваг поліному

$$P_{K_4-e}(\lambda) = \lambda^4 - (2a^2 + 2b^2 + c^2)\lambda^2 - 4abc\lambda + a^4 + b^4 - 2a^2b^2.$$

Характеристичні поліноми двох індукованих підграфів, що є циклами довжини 3, також рівні між собою для обох наборів ваг та рівні такому поліному:

$$P_{C_3}(\lambda) = \lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\lambda^2 - 2abc.$$

Також рівні між собою характеристичні поліноми двох індукованих підграфів, що є ланцюгами довжини 2, для обох наборів ваг, вони рівні такому поліному:

$$P_{A_3}(\lambda) = \lambda^3 - (a^2 + b^2)\lambda.$$

Отже, відновити ваги графа $K_4 - e$ за спектрами вибраних вище наборів індукованих під-

графів неможливо. Для інших типів наборів будемо лише вказувати потрібні приклади двох різних вагових функцій, обґрунтування неможливості однозначного відновлення ваг аналогічні до наведеного вище.

2. Дослідимо набір четвертий типу:

$$K_4 - e, C_3, A_2.$$

Без обмеження загальності можна вважати, що обрано індукований підграф C_3^1 з множиною вершин $\{1, 2, 4\}$.

Існують два принципово різні варіанти вибору ланцюга A_2 .

1. Ланцюг A_2 , що є підграфом C_3^1 . У цьому випадку наведемо такий приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a_3 = a_4 = a, a_2 = b, a_5 = c,$
- $a_1 = a_2 = a_4 = a, a_3 = b, a_5 = c,$

де a, b, c — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

2. Ланцюг A_2 , що не є підграфом C_3^1 . У цьому випадку розглянемо такі два різні набори ваг:

- $a_1 = a_2 = a_3 = a, a_4 = b, a_5 = c,$
- $a_2 = a_3 = a_4 = a, a_1 = b, a_5 = c,$

a, b, c — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

5. Проаналізуємо набір п'ятого типу:

$$K_4 - e, A_3, A_2.$$

Без обмеження загальності можна вважати, що обрано індукований підграф A_3^1 з множиною вершин $\{1, 2, 3\}$.

Існує два принципово різні варіанти щодо вибору ланцюга A_2 .

1. Ланцюг A_2 , що містить вершину 2. Для цього варіанта розглянемо такі два різні набори ваг:

- $a_1 = a_2 = a_3 = a, a_4 = b, a_5 = c,$
- $a_1 = a_2 = a_4 = a, a_3 = b, a_5 = c,$

a, b, c — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

2. Ланцюг A_2 , що не містить вершину 2. Тоді наведемо такий приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a_3 = a_4 = a, a_2 = b, a_5 = c,$
- $a_2 = a_3 = a_4 = a, a_1 = b, a_5 = c,$

a, b, c — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

4. Проаналізуємо набір шостого типу:

$$K_4 - e, 2A_2.$$

Розглянемо всі можливі варіанти вибору двох підграфів A_2 .

1. Якщо обрано підграф A_2^5 з множиною вершин $\{2, 4\}$ та підграф, що містить вершину 2 або вершину 4. Оскільки ці випадки аналогічні, то без обмежень загальності, розглянемо випадок вибору A_2^1 з множиною вершин $\{1, 2\}$.

Для цього варіанта наведемо приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a, a_3 = b,$
 - $a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = a, a_2 = b,$
- a, b — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

2. Якщо обрано два підграфи $\mathbf{A}$, що мають спільну вершину, окрім тих випадків, які розглянути у першому варіанті. Достатньо розглянути два випадки: обрані підграфи $\mathbf{A}$ з множинами вершин $\{1, 2\}$ та $\{1, 4\}$ або $\{1, 2\}$ та $\{2, 3\}$. Інші випадки аналогічні.

Для цих випадків розглянемо такі два різні набори ваг:

- $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a, a_3 = b,$
 - $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = a, a_4 = b,$
- a, b — довільні додатні числа такі, що $a \neq b$.

3. Якщо обрано два підграфи $\mathbf{A}$, що не мають спільної вершини. Достатньо розглянути один випадок, оскільки інший аналогічний: обрані підграфи $\mathbf{A}$ з множинами вершин $\{1, 2\}$ та $\{3, 4\}$.

Наведемо приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a_3 = a, a_2 = b, a_4 = d, a_5 = c, a_5 = e,$
 - $a_1 = a_3 = a, a_2 = d, a_4 = b, a_5 = c, a_5 = c,$
- a, b, c, d — довільні додатні числа такі, що $b \neq d$.

5. Аналіз набору $2\mathbf{C}_3$, $\mathbf{A}_2$ восьмого типу проводиться аналогічно до аналізу набору четвертого типу: варто розглянути такі самі варіанти вибору ланцюга $\mathbf{A}_2$ та набори ваг.

6. Проаналізуємо набір одинадцятого типу: $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_2$.

Без обмеження загальності можна вважати, що обрано підграфи $\mathbf{C}_3^1$ та $\mathbf{A}_3^1$ з множинами вершин $\{1, 2, 4\}$ та $\{1, 2, 3\}$ відповідно. Також можна вважати, що як підграф $\mathbf{A}_2$ обрано $\mathbf{A}_2^3$ з множиною вершин $\{3, 4\}$, оскільки в іншому випадку неможливо відновити значення ваги a_3 .

Наведемо приклад двох різних наборів ваг:

- $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, a_4 = d, a_5 = e,$
- $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = e, a_4 = d, a_5 = c,$

a, b, c, d, e — довільні додатні числа такі, що $d \neq e$.

7. Для наборів останніх двох типів — $\mathbf{A}_3$, $2\mathbf{A}_2$ або $3\mathbf{A}_2$ — очевидно, що вагу принаймні одного ребра графа $\mathbf{K}_4 - e$ неможливо визначити.

Розглянуто всі можливі типи наборів, що складаються з трьох різних індукованих підграфів графа $K_4 - e$. Для наборів кожного типу наведено приклади двох різних вагових функцій, за яких відповідні зважені підграфи мають однакові характеристичні поліноми, а отже, й однакові спектри. Це доводить, що за трьома підспектрами неможливо однозначно відновити ваги всіх ребер графа $\mathbf{K}_4 - e$.

Отже, $Srn(K_4 - e) > 3$.

Водночас показано, що чотирьох підспектрів достатньо для повного відновлення всіх ваг ребер, тобто $Srn(K_4 - e) \leq 3$.

Таким чином, маємо $Srn(K_4 - e) = 4$.

Теорему 3 доведено.

Висновки

У цій роботі досліджено обернену спектральну задачу для зважених графів та визначено точні значення спектральних відновлювальних чисел для графів $\mathbf{C}_3 + e$ та $\mathbf{K}_4 - e$.

Застосовуючи узагальнену теорему Захса, побудовано характеристичні многочлени відповідних зважених графів та їхніх індукованих підграфів. Показано, що за трьома або чотирма підспектрами відповідно можна однозначно відновити всі ваги ребер, тоді як за меншої кількості підспектрів відновлення є неоднозначним.

Отримані результати завершують визначення спектральних відновлювальних чисел для всіх зв'язних графів порядку не більш як чотири. Вони створюють основу для подальших досліджень обернених спектральних задач і можуть бути використані під час розроблення алгоритмів відновлення додатних ваг ребер у зважених графах.

Список літератури

1. Brouwer A. E., Haemers W. H. Spectra of Graphs. New York : Springer, 2011. P. 250.
2. Cvetković D. Applications of Graph Spectra: An Introduction to the Literature. *Zbornik Radova*. 2011. Issue 22. Pp. 9–34.
3. Salim A., Sumitra S. Spectral Graph Convolutional Neural Networks in the Context of Regularization Theory. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2024. Vol. 35, No. 4. Pp. 4373–4384.
4. Sen S., Pal S., Sengupta S. Social Sensors in Epidemiological Networks via Graph Eigenvectors. arXiv preprint arXiv:2112.14385. 2021.
5. Hogben L. Spectral graph theory and the inverse eigenvalue problem of a graph. *Chamchuri Journal of Mathematics*. 2009. Vol. 1. Pp. 51–72.
6. Chu M. T. Inverse eigenvalue problems. *SIAM Review*. 1998. Vol. 40, no. 1. Pp. 1–39.
7. Chu M. T., Golub G. H. Structured inverse eigenvalue problems. *Acta Numerica*. 2002. Vol. 11. P. 1–71.
8. Nizhnik L. P., Rabanovich V. I. On new inverse spectral

- problems for weighted graphs. *Methods of Functional Analysis and Topology*. 2017. Vol. 23, no. 1, Pp. 66–75.
9. Sachs H. Beziehungen zwischen den in einem graphen enthaltenen kreisen und seinem charakteristischen polynom. *Publ. Math. Debrecen*. 1964. Bd. 11. S. 119–134.
 10. Тимошкевич Л. М. Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*. 2013. Т. 14. С. 165–175.
 11. Пилипіва О. В., Тимошкевич Л. М. Відновлююче спектральне число зважених графів-циклів. *Наука в контексті глобальної трансформації суспільства. Матеріали науково-практичної конференції (м. Полтава, 26–27 серпня 2022 р.)*. Одеса : Видавництво «Молодий вчений», 2022. С. 113–116.
 12. Аверкін О. С., Тимошкевич Л. М. Відновлююче спектральне число графа K_4 . *Могиланський математичний журнал*. 2024. Т. 7. С. 9–16.
 13. Тимошкевич Л. М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера : дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06. Київ, 2015. 160 с.
 14. Пилипіва О. В., Тимошкевич Л. М. Обернені спектральні задачі для зважених графів. *Могиланський математичний журнал*. 2022. Т. 5. С. 26–32.

References

1. A. E. Brouwer and W. H. Haemers, *Spectra of Graphs* (Springer, New York, 2011), p. 250.
2. D. Cvetković, *Zbornik Radova*. **22**, 9–34 (2011).
3. A. Salim and S. Sumitra, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. **35** (4), 4373–4384 (2024).
4. S. Sen, S. Pal and S. Sengupta, arXiv preprint arXiv:2112.14385 (2021).
5. L. Hogben, *Chamchuri Journal of Mathematics*. **1**, 51–72 (2009).
6. M. T. Chu, *SIAM Review*. **40** (1), 1–39 (1998).
7. M. T. Chu and G. H. Golub, *Acta Numerica*. **11**, 1–71 (2002).
8. L. P. Nizhnik and V. I. Rabanovich, *Methods of Functional Analysis and Topology*. **23** (1), 66–75 (2017).
9. H. Sachs, *Publ. Math. Debrecen*. **11**, 119–134 (1964).
10. L. M. Tymoshkevych, *Scientific Journal of Mykhailo Dragomanov State University of Ukraine. Seriya 1. Physical and mathematical sciences*, **14**. 165–175 (2013).
11. O. V. Pylypiva and L. M. Tymoshkevych, in: *Proceedings of the Scientific-Practical Conference* (Poltava, August 26–27, 2022) (“Molodyi Vchenyi” Publishing, Odesa, 2022), pp. 113–116.
12. O. S. Averkin and L. M. Tymoshkevych, *Mohyla Mathematical Journal*. **7**, 9–16 (2024).
13. L. M. Tymoshkevych, PhD diss., Kyiv, 2015.
14. O. V. Pylypiva and L. M. Tymoshkevych, *Mohyla Mathematical Journal*. **5**, 26–32 (2022).

L. Tymoshkevych, K. Cherniavska

SPECTRAL RECONSTRUCTION NUMBERS OF GRAPHS $C_3 + e$ AND $K_4 - e$

This paper investigates an inverse spectral problem for weighted graphs. The problem under consideration concerns the reconstruction of edge weights from the spectra of induced subgraphs. We focus on determining the *spectral reconstruction number* $Srn(G)$, defined as the minimal number of spectra of induced subgraphs required to uniquely recover all edge weights of a weighted graph G .

The main contribution of this work is the exact determination of the spectral reconstruction number for the paw graph $C_3 + e$ and the diamond graph $K_4 - e$.

The obtained results complete the determination of spectral reconstructive numbers for all connected graphs of order at most four. They can be used for further research on inverse spectral problems and for developing algorithms to reconstruct edge weights in graphs.

Keywords: spectra of graph, eigenvalues, inverse spectral problems, weighted graph, subgraphs of graph.

Матеріал надійшов 13.10.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)

ПОТОЧНЕ ПРОГНОЗУВАННЯ ВВП ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛЕЙ ФАКТОРІВ ЗІ ЗМІШАНОЮ ЧАСТОТОЮ ДЛЯ УКРАЇНСЬКИХ РЕГІОНІВ

Своєчасна оцінка регіональної економічної активності є ключовою для прийняття обґрунтованих рішень та реагування на кризові ситуації, особливо в економіках, де офіційна статистика публікується із суттєвими затримками. В Україні дані про валовий регіональний продукт (ВРП) оприлюднюються лише один раз на рік із запізненням до 16 місяців, що значно ускладнює моніторинг економічної ситуації в реальному часі. У цьому дослідженні запропоновано модель *Mixed-Frequency Factor-Augmented Vector Autoregression (MF-FAVAR)* для теперішнього прогнозування (*nowcasting*) квартального зростання ВРП для київського регіону шляхом поєднання річних, квартальних і місячних показників.

Запропонована структура інтегрує традиційні макроекономічні статистичні показники з високочастотними цифровими сигналами, отриманими з *Google Trends*, що дає змогу відстежувати зміни у споживчих настроях та поведінкових паттернах. Ці цифрові індикатори виступають проксі змін у споживчих настроях, намірах щодо витрат і очікуваннях на ринку праці, надаючи додаткову інформацію порівняно з офіційною статистикою, що публікується із затримкою. Зменшення розмірності даних здійснюється за допомогою сучасних методів факторної екстракції, розроблених для неповних і неузгоджених наборів даних, зокрема *Expectation-Maximisation Principal Component Analysis (EMPCA)*, *Bayesian PCA (BPCA)* та *Singular Value Decomposition Imputation (SVDI)*. Річний ряд ВРП було перетворено на квартальний за допомогою методу Дентона–Шолетта, що забезпечує узгодженість з офіційними підсумками.

Емпіричні результати показують, що факторна екстракція на основі EMPCA забезпечує найстабільніші та найточніші коротко-, середньо- та довгострокові прогнози. Зокрема, EMPCA досягає найменших значень середньоквадратичної похибки прогнозу (RMSFE) та безперервного рангового ймовірнісного показника (CRPS), що підтверджує її стійкість у умовах обмежених і зашумлених даних. Отримані результати свідчать, що моделі зі змішаною частотою та факторною структурою є ефективним інструментом для регіонального *nowcasting* за умов нестачі даних, що робить їх особливо релевантними для перехідних і кризових економік, таких, як Україна.

Ключові слова: MF-FAVAR, FAVAR, поточне прогнозування, EMPCA, GRP, RMSE, MAPE, Google Trends.

Вступ

Своєчасний моніторинг регіональної економічної активності набуває дедалі більшої ваги в сучасних макроекономічних дослідженнях та у сфері формування економічної політики. У періоди структурної нестабільності чи кризових явищ, зокрема під час війни, що триває в Україні, традиційні статистичні системи зазнають суттєвих затримок у публікації даних, що істотно ускладнює оцінювання економічної динаміки в режимі реального часу. Так, офіційна статистика валового регіонального продукту (ВРП) в Україні оприлюднюється з лагом до 16 місяців після звітного року, залишаючи органи державного управління, бізнес та наукову спільноту без актуальних індикаторів локальної еко-

номічної динаміки.

Задля подолання цього інформаційного розриву у сучасних прогнозних системах активно застосовують методи *nowcasting*. У концептуалізації Баньбура та ін. (2011, 2013) [1, 2], *nowcasting* означає використання неповних та асинхронних потоків даних для оцінювання поточного стану економіки. Інтегруючи високочастотні індикатори — щомісячні або щотижневі статистичні показники, результати опитувань чи цифрові поведінкові метрики, — такі моделі надають своєчасні сигнали економічної активності ще до оприлюднення офіційних релізів. Подібні підходи особливо цінні для економік, що стикаються з обмеженістю даних, частими ревізіями або перервами у статистичному спостереженні.

У контексті українських регіонів ці викли-

ки проявляються особливо гостро. Обмежена довжина часових рядів, асинхронність публікацій показників та структурні зміни, зумовлені війною, зумовлюють необхідність застосування стійких, гнучких та інформаційно-ефективних методів моделювання. Суміжні підходи прогнозування в умовах обмеженої інформації вже розглядалися у працях, що поєднують машинне навчання та економетричні гібридні моделі (Дрінь та ін. (2023) [19]). Нещодавня література також підкреслює ефективність змішаночастотних та фактор-розширених підходів. Зокрема, модель *Mixed-Frequency Vector Autoregression (MF-VAR)*, запропонована Куп та ін. (2023) [3], забезпечує системний підхід до роботи з незбалансованими наборами даних та інтеграції змінних різної частоти. Водночас MF-VAR стають нестабільними за великої кількості предикторів і коротких вибірок — що є типовим для регіональних досліджень.

Для подолання цих обмежень у цьому дослідженні застосовано модель *Mixed-Frequency Factor-Augmented Vector Autoregression (MF-FAVAR)*, яка поєднує переваги змішаночастотної інтеграції та факторного зниження розмірності. Такий підхід дозволяє стискати інформацію з широкого спектра економічних і цифрових індикаторів у невелику кількість латентних факторів, що відображають коваріації в регіональній економіці. Ці латентні фактори надалі формують динамічну систему VAR для отримання квартальних nowcast-оцінок ВРП на прикладі міста Київ.

Місто Київ обрано фокусним регіоном з трьох основних причин: (i) воно має найбільш повний набір регіональної статистики в Україні; (ii) його економічна структура є високодиверсифікованою, охоплюючи як промислові, так і сервісні сектори; (iii) цифрові індикатори, зокрема дані Google Trends, особливо інформативні для цього регіону, надаючи цінні проксі-зміни для вимірювання настроїв та поведінки споживачів.

Стаття робить внесок у розвиток досліджень субнаціонального nowcasting у трьох напрямках. По-перше, вона впроваджує сучасну модель MF-FAVAR в український контекст, демонструючи її працездатність в умовах екстремальної обмеженості даних. По-друге, порівнюються кілька просунутих алгоритмів факторної екстракції — Expectation-Maximisation PCA (EMPCA), Bayesian PCA (BPCA) та Singular Value Decomposition Imputation (SVDI) — з погляду стабільності та точності прогнозу. По-третє, оцінюється робастність запропонованого підходу за різних прогнозних горизонтів та конфігурацій даних.

Отримані результати свідчать, що фактор-

не зниження розмірності за допомогою ЕМРСА суттєво підвищує точність прогнозування, особливо на коротких і довгих горизонтах, водночас забезпечуючи стабільність в умовах нерегулярних чи неповних даних. Це підтверджує високий потенціал змішаночастотних фактор-розширених методів для моніторингу регіональної економічної динаміки у країнах з перехідною економікою та в умовах кризових викликів.

Подальша структура статті є такою: викладено теоретичні засади та представлено MF-FAVAR-модель; описано джерела даних та методи факторної екстракції; наведено емпіричні результати та оцінку прогнозної якості; подано ключові висновки та окреслено напрями майбутніх досліджень.

Попередні теоретичні засади

Nowcasting. Nowcasting означає оцінювання поточного стану економіки в режимі реального часу на основі неповних та асинхронних потоків даних. Такий підхід розроблено для подолання затримок офіційної статистики шляхом інтеграції високочастотних індикаторів (Баньбура та ін. (2013) [1]). Як підкреслюють Баньбура та ін. (2011) [2], nowcasting забезпечує короткострокові прогнози економічної активності ще до виходу офіційних макроекономічних показників, що є критично важливим у періоди швидких змін, кризових явищ або дефіциту даних.

У регіональному українському контексті — де доступність даних є обмеженою, а часові ряди порушені війною, — змішаночастотні підходи набувають особливої актуальності. Коор та ін. (2023) [3] пропонують великі змішаночастотні VAR-моделі (MF-VAR), які враховують короткі вибірки та явно розв'язують проблему «рваного краю» як на початку, так і наприкінці вибірки. Типовим викликом для України є те, що дані про ВРП публікуються лише щорічно і з істотним лагом (10–16 місяців). Для операціоналізації сигналів у режимі реального часу високочастотні індикатори (щомісячні/щотижневі) можна поєднувати з річними цільовими змінними за допомогою часової узгодженості та факторного стискання. У цьому дослідженні для Києва квартальні значення ВРП було отримано шляхом дезагрегації за методом Дентона-Шолетта ([7, 8]), а вимірність знижено завдяки факторній екстракції перед застосуванням VAR-моделювання.

Паралельна література формалізує обробку неузгоджених потоків даних у реальному часі. Динамічні факторні моделі (Dynamic factor

model – DFM), змішане вибірконе використання даних (Mixed Data Sampling – MIDAS) та MF-VAR автоматизують експертні оцінки за умов великих та асинхронних публікацій [1]. На багаторегіональному рівні панельний nowcasting підвищує стабільність та забезпечує крос-секційне використання інформації (Фостен та ін., (2022) [16]), що вказує на природне розширення підходу за межі одного регіону.

Класична VAR-модель. Векторна авторегресія (VAR) (Сімс (1980) [4]) описує K -вимірний вектор y_t у вигляді

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma), \quad (1)$$

де $A_i \in \mathbb{R}^{K \times K}$, а ε_t є похибкою. VAR-моделі широко застосовують для прогнозування та структурного аналізу, однак вони потребують збалансованих панелей і містять $K^2 p$ параметрів, що призводить до надмірної параметризації у випадку невеликих регіональних вибірок.

Змішаночастотні VAR (MF-VAR). MF-VAR розширює класичні VAR для спільного використання змінних, що спостерігаються з різною частотою (щомісячно, щоквартально, щорічно), шляхом їх узгодження в регресійній або стан-просторовій постановці. Типові інструменти включають MIDAS-поліноми, фільтр Калмана або базове узгодження (Фороні та ін. (2013) [5]; Шорфхайде та ін. (2015) [6]). Попри ефективність у nowcasting, MF-VAR не має вбудованих механізмів зниження розмірності: за великої кількості високочастотних індикаторів виникає ризик надмірної параметризації та нестабільності, особливо за умов «рваних країв» (Куп та ін. (2023) [3]), характерних для українських регіонів.

Змішаночастотні FAVAR (MF-FAVAR)

Структура моделі. MF-FAVAR інтегрує механізм зниження розмірності у змішаночастотну VAR шляхом введення невеликого набору латентних факторів, що узагальнюють коваріації між багатьма спостережуваними індикаторами. Спостережувані змінні поділяють на високочастотні $x_t^{(H)} \in \mathbb{R}^{n_H}$ (наприклад, щомісячні макроекономічні та цифрові показники) та низькочастотні $y_t^{(L)} \in \mathbb{R}^{n_L}$ (наприклад, річний ВВП). Нехай $f_t \in \mathbb{R}^r$ — r латентних факторів, що еволюціонують як

$$f_t = \Phi_1 f_{t-1} + \dots + \Phi_p f_{t-p} + \nu_t, \nu_t \sim \mathcal{N}(0, Q), \quad (2)$$

де $\Phi_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Змішаночастотні рівняння вимірювання пов'язують спостережувані змінні з

факторами:

$$x_t^{(H)} = \Lambda^{(H)} f_t + \eta_t^{(H)}, \quad (3)$$

$$y_t^{(L)} = \Lambda^{(L)} f_t + \eta_t^{(L)}, \quad (4)$$

де $\Lambda^{(H)}$ та $\Lambda^{(L)}$ — матриці навантажень, а $\eta_t^{(\cdot)}$ — унікальні збурення (idiosyncratic components). Квартальна цільова змінна ВРП (побудована нижче) входить до $y_t^{(L)}$ та прогнозується на основі f_t ; своєю чергою, фактори формуються в режимі реального часу завдяки більш оперативним $x_t^{(H)}$.

Позначимо $Z_t = [f_t^\top, y_t^{(L)\top}]^\top$. Тоді система MF-FAVAR може бути подана у вигляді:

$$Z_t = A_1 Z_{t-1} + \dots + A_p Z_{t-p} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma). \quad (5)$$

Таке спільне представлення охоплює як латентні, так і спостережувані низькочастотні дані та об'єднується в єдину форму.

Переваги. MF-FAVAR забезпечує: (i) *зниження розмірності* (невелика кількість r замінює численні n_H фактори), (ii) *стійкість* до «рваних країв» та пропусків завдяки факторній екстракції та (iii) *узагальненість* через динаміку спільних компонент, що відфільтровує збурений шум [2].

Дані та методологія

Опис даних та часове узгодження.

Дослідження зосереджено на місті Київ. Щорічні дані ВРП (2004–2021) отримано з Державної служби статистики України [20] та дезагреговано у квартальний ряд за методом Дентона (1971) [7] і Шолетта (1984) [8]. Формально, процедура Дентона–Шолетта знаходить квартальний ряд $\{y_t\}_{t=1}^{4T}$, що мінімізує

$$\min_{\{y_t\}} \sum_{t=2}^{4T} (y_t - y_{t-1})^2$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t=4(\tau-1)+1}^{4\tau} y_t = Y_\tau, \quad \tau = 1, \dots, T, \quad (6)$$

де Y_τ — це спостережувані річні підсумки. Оптимізація забезпечує плавність квартальних змін за збереження річної узгодженості. Це дозволяє побудувати гладкий квартальний ряд, узгоджений з річними орієнтирами, що створює основу для моделювання квартального зростання.

Високочастотні предиктори включають щомісячні макроекономічні ряди (наприклад, споживчі ціни, заробітна плата, обіг роздрібною торгівлі, будівництво, зайнятість) та індикатори Google Trends, що відображають динаміку за

ключовими словами, пов'язаними зі споживанням і настроями (зокрема, *інвестиції, інфляція, безробіття, заощадження*, пошукові запити щодо брендів). Щомісячні ряди конвертуються у квартальні шляхом підсумовування для потокових змінних та усереднення для запасів; річні змінні пролонгуються у межах року. Змінні логарифмуються за потреби та стандартизуються.

Залучення даних Google Trends мотивоване їхньою доведеною чутливістю до економічних шоків і поведінкових зрушень. Спираючись на Шмідт та Фозен (2009) [17] та Індако (2020) [18], були зібрані індекси інтенсивності пошуку для ключових слів, пов'язаних із споживанням («купити», «знижка», «подорож»), цінами («інфляція», «девальвація») та ринком праці («робота», «зарплата»). Ці індекси відображають миттєву суспільну увагу та очікування, які, як правило, передують офіційним опитуванням і цінній статистиці. Дані Google збиралися щомісячно, нормувалися до шкали 0 – 100 і агрегувалися у квартальні середні для узгодження з частотою даних ВРП.

Факторна екстракція за умов пропусків. З огляду на незбалансованість покриття та «рвані краї», розглянуто кілька методів на основі головних компонент:

ЕМРСА: expectation–maximisation PCA — ітераційно відновлює пропущені значення при одночасному оцінюванні навантажень і факторних балів;

ВРСА: баєсівська PCA з апіорними розподілами та автоматичним визначенням релевантності (Оба та ін. (2003) [9]);

SVDI: ітераційне низькорівневе відновлення матриці за допомогою усіченого SVD (Хансен (1987) [10]);

TW/TP: підходи Tall–Wide та Tall–Projection для «рваних країв» (Бай (2021) [11], Каган та ін. (2023) [12]).

У випадку панелі даних для Києва методи ЕМРСА, ВРСА та SVDI забезпечують стабільні фактори; методи TW і TP було відхилено через недостатню кількість повних «якірних» рядів і брак покриття у вікнах.

Оцінювання та схема перевірки. Латентні фактори ($r = 2$) виокремлюються з квартальної матриці предикторів X_t за допомогою кожного зі стійких методів (ЕМРСА, ВРСА, SVDI). VAR-модель для $[Y_t, f_t]$ із лагами $p \in \{2, 4\}$ утворює основу MF-FAVAR. Часове розбиття даних передбачає використання приблизно 80% спостережень для оцінювання та 20% для перевірки. Рекурсивні прогнози генеруються для горизонтів 2, 4 та 24 квартали. Точність прогнозів узагальнюється за трьома

стандартними метриками: RMSFE (точність у точковому вимірі), CRPS (калібрування розподілу) та SMAPE (обмежена відносна похибка) (Чен та ін. (2017) [13], Гнетінг та Рафтері (2006) [14], Хайндман та Келер (2007) [15]).

$$\text{RMSFE} = \sqrt{\frac{1}{H} \sum_{h=1}^H (\hat{y}_{T+h|T} - y_{T+h})^2}, \quad (7)$$

$$\text{CRPS}(\hat{F}, y) = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{F}(z) - \mathbb{I}\{z \geq y\}]^2 dz, \quad (8)$$

$$\text{SMAPE} = \frac{100\%}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|\hat{y}_t - y_t|}{(|\hat{y}_t| + |y_t|)/2}. \quad (9)$$

де $\hat{F}$ — прогнозна функція розподілу ймовірностей.

Результати

Основні висновки. У різних прогнозних горизонтах MF-FAVAR на основі ЕМРСА забезпечує найстабільніші та найточніші прогнози. Для дуже коротких горизонтів (2 квартали) ЕМРСА досягає найнижчих значень RMSFE та CRPS; на середніх горизонтах (4 квартали) конкурентоспроможним є метод SVDI; на довгих горизонтах (24 квартали) ЕМРСА дещо перевершує ВРСА.

Як показано на рис. 1, на довгому горизонті у 24 квартали MF-FAVAR з факторною екстракцією ЕМРСА забезпечує найточніші прогнози як у точковому, так і у розподільчому вимірі. Траєкторія RMSFE та CRPS для довгого горизонту свідчить про невелику, але систематичну перевагу ЕМРСА над ВРСА, тоді як SVDI демонструє гірші результати, що узгоджується з підсумком у табл. 1.

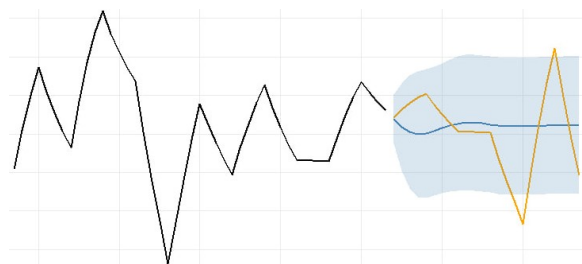


Рис. 1. Довгий горизонт (24 квартали)

Таблиця 1. Точність прогнозування за горизонтами (позавибіркове узагальнення)

Метод	Горизонт	RMSFE	CRPS
EMPCA	2Q	0.0033	0.0034
BPCA	2Q	0.0034	0.0034
SVDI	4Q	0.0167	0.0093
EMPCA	24Q	0.0208	0.0116

Примітка. Точність прогнозування зростає завдяки стабілізації динаміки факторів через зниження розмірності. EMPCA послідовно досягає найнижчих похибок на всіх горизонтах, особливо для 24-квартального горизонту, що ілюструється на рис. 1.

Простота моделі та стійкість. Перевірка на стійкість, яка виключає тижневі індикатори (розріджені та шумові) та зберігає базове ядро щомісячних і щорічних змінних, покращує точність, при цьому EMPCA знову демонструє перевагу. Це підкреслює важливість економічних наборів змінних у змішаночастотних моделях [2; 3].

Висновки та напрями подальших досліджень

Модель MF-FAVAR пропонує практичне рішення для регіонального nowcasting в умовах обмеженої доступності даних. Для Києва поєднання часово дезагрегованого ВРП з висо-

кочастотними макроекономічними та цифровими індикаторами, стислими за допомогою методів факторної екстракції на основі PCA, забезпечує точні квартальні nowcast-прогнози попри затримки офіційних публікацій. EMPCA виявляється послідовно стійким методом виділення факторів для панелей із «рваними краями», особливо на коротких горизонтах; SVDI демонструє конкурентні результати на середніх горизонтах; BPCA наближається до EMPCA на довших проміжках. Використання поведінкових даних із Google Trends підвищило чутливість короткострокових прогнозів, особливо у періоди структурних зламів та порушень статистичного збору, що підкреслює потенціал цифрових індикаторів для моніторингу регіональної економіки в реальному часі.

Подальші дослідження можуть: (i) поширити підхід на багаторегіональні панелі з метою використання крос-секційної інформації (Фостен та ін. (2022) [16]), (ii) інтегрувати додаткові високочастотні сигнали (мобільність, транзакції, соціальні медіа), а також (iii) здійснити порівняння з глибокими змішаночастотними моделями або гібридами MF-MIDAS. Отримані результати підтверджують, що факторне стискання є ключовим елементом для стабільного nowcasting за умов коротких та нерегулярних регіональних вибірок.

Список літератури

1. Bańbura M., Giannone D., Modugno M., Reichlin L. Nowcasting and the Real-Time Data Flow. ECB Working Paper No. 1564. 2013.
2. Bańbura M., Giannone D., Reichlin L. Nowcasting. The Oxford Handbook of Economic Forecasting. Oxford : OUP, 2011.
3. Koop G., McIntyre S., Mitchell J., Poon A., Wu P. Incorporating Short Data into Large Mixed-Frequency VARs for Regional Nowcasting. FRB Cleveland Working Paper No. 23-09. 2023.
4. Sims C. A. Macroeconomics and Reality. *Econometrica*. 1980. Vol. 48, No. 1. Pp. 1–48.
5. Foroni C., Marcellino M. A Survey of Econometric Methods for Mixed-Frequency Data. *Advances in Econometrics*. 2013. Vol. 31. Pp. 1–45.
6. Schorfheide F., Song D. Real-Time Forecasting With a Mixed-Frequency VAR. *Journal of Business & Economic Statistics*. 2015. Vol. 33, No. 3. Pp. 366–380.
7. Denton F. T. Adjustment of Monthly or Quarterly Series to Annual Totals. *Journal of the American Statistical Association*. 1971. Vol. 66, No. 333. Pp. 99–102.
8. Cholette P. A. Adjusting Sub-annual Series to Yearly Benchmarks. *Survey Methodology*. 1984. Vol. 10. Pp. 35–49.
9. Oba S., et al. A Bayesian Missing Value Estimation Method for Gene Expression Data. *Bioinformatics*. 2003. Vol. 19, No. 16. Pp. 2088–2096.
10. Hansen P. C. The Truncated SVD as a Method for Regularization. *BIT Numerical Mathematics*. 1987. Vol. 27, No. 4. Pp. 534–553.
11. Bai J., Ng S. Matrix Completion With Cross-Sectional and Serial Dependence. *Journal of Econometrics*. 2021. Vol. 222, No. 1. Pp. 413–430.
12. Cahan D., Foerster A., Sarte P.-D., Watson M. Nowcasting With Ragged-Edge Data: A ProjectionBased Approach. FRB Working Paper. 2023.
13. Chen C., Twycross J., Garibaldi J. M. A New Accuracy Measure Based on Bounded Relative Error. *PLoS ONE*. 2017. Vol. 12, No. 3. e0174202.
14. Gneiting T., Raftery A. E. Strictly Proper Scoring Rules, Prediction, and Estimation. *Journal of the American Statistical Association*. 2007. Vol. 102, No. 477. Pp. 359–378.
15. Hyndman R. J., Koehler A. B. Another Look at Measures of Forecast Accuracy. *International Journal of Forecasting*. 2006. Vol. 22, No. 4. Pp. 679–688.
16. Fosten J., Greenaway-McGrevy R. Panel Data Nowcasting. *Econometric Reviews*. 2022. Vol. 41, No. 7. Pp. 675–696.
17. Schmidt T., Vosen S. Forecasting Private Consumption: Survey-Based Indicators vs. Google Trends. Rheinisch-Westfälisches Institut für Wirtschaftsforschung (RWI), Report No. 155. 2009.
18. Indaco A. From Twitter to GDP: Estimating Economic Activity from Social Media. Carnegie Mellon University in Qatar, Education City, Doha. 2020.
19. Дрін С., Крючкова А., Толочкова В. Прогностична модель для продукту без історії з використанням LightGBM: модель ціноутворення для нового продукту. *Могиллянський математичний журнал*. 2023. Т. 6. С. 6–13.
20. Державна служба статистики України. Ста-

тистика валового регіонального продукту. URL: https://www.ukrstat.gov.ua/operativ/menu/menu_u/nac_r.htm

References

1. M. Bańbura, D. Giannone, M. Modugno and L. Reichlin, ECB Working Paper No. 1564 (2013).
2. M. Bańbura, D. Giannone and L. Reichlin, in: *The Oxford Handbook of Economic Forecasting* (OUP, Oxford, 2011).
3. G. Koop, S. McIntyre, J. Mitchell, A. Poon and P. Wu, FRB Cleveland Working Paper No. 23-09 (2023).
4. C. A. Sims, *Econometrica*. **48** (1), 1–48 (1980).
5. C. Foroni and M. Marcellino, *Advances in Econometrics*. **31**, 1–45 (2013).
6. F. Schorfheide and D. Song, *Journal of Business & Economic Statistics*. **33** (3), 366–380 (2015).
7. F. T. Denton, *Journal of the American Statistical Association*. **66** (333), 99–102 (1971).
8. P. A. Cholette, *Survey Methodology*. **10**, 35–49 (1984).
9. S. Oba, et al., *Bioinformatics*. **19** (16), 2088–2096 (2003).
10. P. C. Hansen, *BIT Numerical Mathematics*. **27** (4), 534–553 (1987).
11. J. Bai and S. Ng, *Journal of Econometrics*. **222** (1), 413–430 (2021).
12. D. Cahan, A. Foerster, P.-D. Sarte and M. Watson, FRB Working Paper (2023).
13. C. Chen, J. Twycross and J. M. Garibaldi, *PLoS ONE*. **12** (3), e0174202 (2017).
14. T. Gneiting and A. E. Raftery, *Journal of the American Statistical Association*. **102** (477), 359–378 (2007).
15. R. J. Hyndman and A. B. Koehler, *International Journal of Forecasting*. **22** (4), 679–688 (2006).
16. J. Fosten and R. Greenaway-McGrevy, *Econometric Reviews*. **41** (7), 675–696 (2022).
17. T. Schmidt and S. Vosen, *Forecasting Private Consumption: Survey-Based Indicators vs. Google Trends* (Rheinisch-Westfälisches Institut für Wirtschaftsforschung (RWI), Report No. 155, 2009).
18. A. Indaco, *From Twitter to GDP: Estimating Economic Activity from Social Media* (Carnegie Mellon University in Qatar, Education City, Doha, 2020).
19. S. Drin, A. Kriuchkova and V. Toloknova, *Mohyla Mathematical Journal*. **6**, 6–13 (2023).
20. State Statistics Service of Ukraine, “Gross Regional Product Statistics”, available at: https://www.ukrstat.gov.ua/operativ/menu/menu_u/nac_r.htm (accessed 30 September 2025).

S. Drin, A. Zhuravlova, G. Kriukova

NOWCASTING REGIONAL GDP WITH MIXED-FREQUENCY FACTOR MODELS FOR UKRAINIAN REGIONS

Timely assessment of regional economic activity is essential for evidence-based policy and crisis response, particularly in economies where official statistics are released with significant delays. In Ukraine, regional Gross Regional Product (GRP) figures appear only once per year and with a lag of up to 16 months, severely limiting real-time monitoring. This study develops a *Mixed-Frequency Factor-Augmented Vector Autoregression (MF-FAVAR)* model to nowcast quarterly GRP growth for the Kyiv region by combining annual, quarterly, and monthly indicators.

The proposed framework integrates traditional macroeconomic statistics with high-frequency digital signals derived from Google Trends, capturing shifts in consumer sentiment and behavioural patterns. These digital indicators serve as real-time proxies for household sentiment, consumption intentions, and labour market expectations, offering a complementary perspective to lagged official statistics.

Empirical results demonstrate that EMPCA-based factor extraction delivers the most stable and accurate nowcasts across short, medium, and long horizons. In particular, EMPCA achieves the lowest Root Mean Squared Forecast Error (RMSFE) and Continuous Ranked Probability Score (CRPS), confirming its robustness under sparse and noisy conditions. The findings suggest that mixed-frequency factor-augmented frameworks offer a practical and efficient solution for regional nowcasting under data scarcity, making them especially relevant for transition and crisis economies such as Ukraine.

Keywords: MF-FAVAR, FAVAR, Nowcasting, EMPCA, GRP, RMSE, MAPE, Google Trends.

Матеріал надійшов 07.10.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)

ITERATIVE DEMAND OPTIMIZATION USING THE DISCRETE FUNCTIONAL PARTICLE METHOD

This article addresses the challenge of assortment planning in retail under uncertain demand and operational constraints. It develops a hybrid methodology that integrates SARIMAX time-series forecasting with the Discrete Functional Particle Method (DFPM) for optimisation, enabling both strategic (long-term) and tactical (monthly) decision support.

The proposed framework combines statistical forecasting with iterative optimisation in order to balance predictive accuracy and operational feasibility. In the forecasting stage, a SARIMAX model with exogenous regressors captures seasonality, promotions, and demand fluctuations, while a safeguard mechanism prevents excessively pessimistic predictions. In the optimisation stage, DFPM is applied to a quadratic objective under linear constraints, with parameters tuned using eigenvalue analysis of the risk matrix. A novel operational risk metric—the Inventory Efficiency Ratio—is introduced, defined as the ratio of leftover stock value to revenue, and used to construct the covariance structure for optimisation.

A hybrid strategy blends the mathematically optimal allocation with a baseline derived from historical sales shares, ensuring both practical stability and data-driven improvements. Tactical adjustments refine this strategic solution by incorporating seasonal indices and business constraints such as minimum and maximum category weights.

The framework is implemented in Python and evaluated on real-world retail data from a Ukrainian anti-stress toy retailer. Results demonstrate a 25% reduction in operational risk and a threefold increase in inventory turnover, while maintaining realistic revenue forecasts.

Overall, the work contributes a flexible and reproducible decision-support methodology that unifies modern forecasting and optimisation techniques, providing practitioners with a tool for improving assortment decisions in dynamic retail environments.

Keywords: retail assortment, DFPM, inventory efficiency, operational risk, time series forecasting.

Introduction

Modern companies face immense pressure to accelerate and refine decisions related to product assortment due to rapid changes and growing competition in the retail landscape. The volume, velocity, and volatility of business data make intuitive or situational approaches insufficient. Advances in optimization theory and forecasting models enable the design of robust, flexible decision-support systems that bridge the gap between business intuition and data-driven strategy.

In retail, risk manifests primarily through operational inefficiencies — such as capital immobilized in unsold inventory and delayed responsiveness to demand changes. This demands a rethinking of risk modeling tailored specifically to the retail domain. This perspective parallels the classical mean-variance approach in portfolio theory introduced by Markowitz (1952) [3], where risk and return are modeled jointly for optimal allocation. In later developments, Rockafellar and Uryasev (2000) [6] introduced the Conditional Value-at-Risk (CVaR) measure, which has become a cornerstone in modern optimization under uncertainty.

At the same time, simplistic forecasting tools often prioritize short-term fluctuations at the expense of strategic seasonal trends, thereby undermining long-term planning. As a result, there is a critical need for integrated models that combine predictive accuracy with optimization under uncertainty. Such models must not only capture patterns in consumer demand but also align with operational constraints to ensure that solutions are implementable in practice.

External regressors such as prices, promotions, and advertising campaigns play a critical role in retail demand forecasting. Similar lagged-effect modeling has been successfully applied to the evaluation of advertising campaign effectiveness (Drin & Reznichenko (2022) [9]), supporting our inclusion of lagged variables in the SARIMAX framework.

This work proposes a novel, multi-layered framework for assortment optimization that incorporates two key components: SARIMAX - based demand forecasting and the Discrete Functional Particle Method (DFPM) for iterative optimization. Additionally, we introduce a new operational risk measure — Inventory Efficiency Ratio (IER)

— designed to quantify inefficiencies in the retail pipeline.

By embedding these techniques into a unified system, we offer a practical solution for improving capital productivity, reducing inventory holding costs, and enhancing responsiveness in assortment planning. The methodology is validated through real-world data and demonstrates substantial performance improvements over standard planning strategies.

Methodology for strategic assortment optimization

The foundation of this study lies in creating a multi-phase methodology for identifying the most effective strategic distribution of resources among various product categories. This method employs an advanced iterative optimization technique known as the Discrete Functional Particle Method (DFPM). However, it modifies and incorporates it within a broader framework that guarantees both the consistency and real-world applicability of the outcomes. This section elaborates on the mathematical formulation of the issue and the particular execution of the solution approach.

Forecasting with SARIMAX

To predict SKU-level demand, we employ a Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average model with exogenous regressors (SARIMAX), which extends the classical ARIMA framework developed by Box and Jenkins (2015) [1] and further elaborated in modern forecasting practice by Hyndman and Athanasopoulos (2021) [2] to explicitly capture seasonal effects and incorporate external predictors:

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j} + \sum_k \beta_k x_{k,t} + \sum_{s=1}^S \Phi_s y_{t-sT} + \epsilon_t,$$

where $x_{k,t}$ are external regressors (e.g., price, promotions, holidays), T is the seasonal period, and ϵ_t is white noise with zero mean and variance σ^2 .

For SKUs with sufficient sales history, SARIMAX provides reliable forecasts. However, for *new products* without historical data, cold-start forecasting methods (Drin & Shchetyuk (2024) [7]) or machine-learning approaches such as LightGBM (Toloknova, Kriuchkova & Drin (2024) [8]) may serve as complementary models, ensuring that assortment planning can extend beyond established categories.

Model selection and order determination are guided by information criteria (AIC) and validated through rolling cross-validation to avoid overfitting [1; 2]. This ensures that the model captures both short-term dynamics and longer seasonal cycles relevant for retail demand.

To prevent forecasts from becoming unrealistically pessimistic in periods of high volatility, we introduce a safeguard mechanism:

$$\hat{y}_t = \max(\hat{y}_t, \tau \cdot \bar{y}),$$

where $\bar{y}$ is the historical mean demand, and $\tau \in [0.2, 0.4]$ is an empirically tuned parameter. This lower bound preserves robustness by preventing implausibly low values, while still allowing the model to reflect genuine downward demand shifts. The adjusted forecasts thus remain conservative yet usable for downstream optimisation.

Problem formulation for product assortment optimization

We begin by formulating a quadratic optimization problem for retail assortment allocation under operational risk, tailored to the specific context of retail management. We consider a category consisting of k products. Let $d_i = (d_{1i}, \dots, d_{ki})^T$ be the k -dimensional vector of observed sales quantities for these products at time $i = 1, \dots, N$. We assume the second moment of d_i is finite.

Let $w = (w_1, \dots, w_k)^T$ be the vector of weights for each product in the category, where w_j denotes the share of j th product. We define $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^k$ as the vector of ones.

A key distinction of our approach is how we define "risk" and "return." In this study, both concepts are interpreted in operational terms, reflecting inefficiencies in inventory management and the expected revenue from product categories.

- **Return Vector μ :** The vector $\mu \in \mathbb{R}^k$ represents the expected return for each category, which we define as the historical average revenue.
- **Risk Matrix R :** The matrix $R \in \mathbb{R}^{k \times k}$ represents the operational risk. It is defined as the covariance matrix of the **Inventory Efficiency Ratio** ($E_i(t)$). This ratio, calculated for each category i at each time period t , is given by:

$$E_i(t) = \frac{\text{Value of Leftovers}_i(t)}{\text{Revenue}_i(t)}. \quad (1)$$

A high value indicates operational inefficiency. Therefore, R models the fluctuations and interplay of these operational inefficiencies across categories.

Risk operator R : covariance vs. penalty. In this work, we examined two alternative formulations of the risk matrix: **Covariance-based form:** $R = \text{Cov}(\text{IER})$. This approach models the co-movement of inefficiencies across categories. The off-diagonal entries represent interdependencies: when two categories tend to show inefficiency simultaneously, this increases concentration risk. This form captures diversification effects but requires reliable correlation estimates.

Diagonal penalty form: $R = \text{diag}(\overline{\text{IER}})$. Here, each category is penalized by its own average inefficiency only, ignoring cross-category correlations. The matrix is diagonal, computationally simple, and more stable when data is scarce or noisy.

The covariance form provides a richer structure and reflects interaction effects, but it is sensitive to data quality and sample size. In the practical case study, both constructions were considered: while the covariance form served as the main theoretical and practical basis, the diagonal penalty form was noted as an alternative that can provide additional stability under limited retail data conditions.

Optimization with DFPM

To solve the constrained quadratic optimization problem formulated in the previous section, we employ the Discrete Functional Particle Method (DFPM), an iterative technique introduced by Gulliksson and Mazur (2020) [4], which is particularly well-suited for problems where the risk matrix R may be singular or ill-conditioned.

The core idea of DFPM is to find the minimum of a convex function $V(u)$ by treating it as a potential field for a physical system. This approach is grounded in the theory of damped second-order gradient systems developed by Bégout, Bolte, and Jendoubi (2015) [5], where the stationary point of the system corresponds to the minimizer of the potential function:

$$\ddot{u}(t) + \eta \dot{u}(t) = -\nabla V(u(t)), \quad \eta > 0, \quad (2)$$

where $\dot{u}$ and $\ddot{u}$ are the first and second time derivatives of the position vector u , and η is a damping coefficient.

Application to the Constrained Problem

Our main optimization problem is constrained:

$$\min_{w \in \mathbb{R}^k} \frac{1}{2} w^\top R w \quad \text{s.t. } B w = c, \quad (3)$$

where R is the operational risk matrix. The factor $\frac{1}{2}$ is introduced as a standard convention in quadratic optimisation: it does not affect the minimiser but simplifies the gradient expression, since $\nabla_w \frac{1}{2} w^\top R w = R w$ instead of $2 R w$. The constraints are given by:

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^\top \\ \mu^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times k}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_{\text{target}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (4)$$

Here, the first row of B corresponds to the condition

$$w^\top \mathbf{1} = 1,$$

which enforces that the weights across all product categories sum to one, i.e. the entire assortment share is fully allocated. The second row corresponds to

$$w^\top \mu = \mu_{\text{target}},$$

which ensures that the expected total revenue (calculated as the weighted average of historical category revenues μ) reaches a predetermined target level μ_{target} . Thus, the constraint system ($B w = c$) simultaneously guarantees both normalization of the assortment shares and achievement of the revenue target.

To apply DFPM, we first eliminate the linear constraints by parameterizing the solution vector w . Any feasible w that satisfies $B w = c$ can be written as:

$$w = Z u + g, \quad u \in \mathbb{R}^{k-2}, \quad (5)$$

where:

- $g = B^T (B B^T)^{-1} c$ is a particular solution to the constraint system.
- $Z \in \mathbb{R}^{k \times (k-2)}$ is a matrix whose columns form an orthonormal basis for the null space (kernel) of B , meaning $B Z = 0$.
- u is a new vector of variables in a lower-dimensional, unconstrained space.

Note that the dimension of the reduced vector u is $k - 2$. This follows from the fact that the constraint matrix $B \in \mathbb{R}^{2 \times k}$ has rank 2 (the two constraints — normalization of weights and the revenue target — are linearly independent). Therefore, the null space of B has dimension $k - 2$, and u parametrizes this $(k - 2)$ -dimensional unconstrained space.

Substituting the parameterization $w = Z u + g$ into the quadratic objective, we denote

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} (Z u + g)^\top R (Z u + g). \quad (6)$$

Expanding the product yields

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} (u^\top Z^\top R Z u + 2 g^\top R Z u + g^\top R g). \quad (7)$$

The last term $\frac{1}{2}g^T Rg$ is constant with respect to u and therefore does not affect the minimization. Dropping this constant, the problem simplifies to

$$\min_{u \in \mathbb{R}^{k-2}} \frac{1}{2} u^T (Z^T R Z) u + (Z^T R g)^T u. \quad (8)$$

Defining

$$M = Z^T R Z, \quad d = Z^T R g,$$

we obtain the equivalent unconstrained problem of minimizing the potential

$$V(u) = \frac{1}{2} u^T M u + d^T u. \quad (9)$$

From equation (9) we compute the gradient of the potential. The derivative of the quadratic term $\frac{1}{2}u^T M u$ gives Mu , while the derivative of the linear term $d^T u$ gives d , so that

$$\nabla V(u) = Mu + d.$$

Substituting this result into the damped dynamical system yields

$$\ddot{u}(t) + \eta \dot{u}(t) = -(Mu(t) + d). \quad (10)$$

To solve this numerically, we introduce the velocity $v(t) = \dot{u}(t)$ and apply the iterative symplectic Euler scheme with a time step Δt :

$$v_{k+1} = (1 - \Delta t \eta) v_k - \Delta t (M u_k + d) \quad (11)$$

$$u_{k+1} = u_k + \Delta t v_{k+1} \quad (12)$$

Here, the factor $(1 - \Delta t \eta)$ represents the damping applied to the velocity vector v_k . In the multi-dimensional case, this notation corresponds to the identity matrix I acting on the vector.

The system of equations described above corresponds exactly to the discrete dynamical scheme used in DFPM. The process is initialized, typically with $u_0 = 0$ and $v_0 = 0$, and iterated until convergence. Once the optimal u^* is obtained, the final weight vector is reconstructed as:

$$w_{\text{optimal}} = Z u^* + g. \quad (13)$$

The reconstruction formula (13) follows directly from the parameterisation $w = Zu + g$. Since u^* is the minimiser of the reduced unconstrained problem, substituting it back yields a feasible vector w_{optimal} that automatically satisfies the original constraints $Bw = c$.

Selection of Δt and η The efficiency of the DFPM solver critically depends on the choice of the step size Δt and the damping coefficient η . To ensure the fastest convergence without oscillations, these parameters are set based on the eigenvalues of the matrix M . Let the smallest positive and

largest eigenvalues of M be $\lambda_{\min}$ and $\lambda_{\max}$, respectively. The optimal parameters are given by:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{2}{\sqrt{\lambda_{\min}} + \sqrt{\lambda_{\max}}}, \\ \eta &= 2 \frac{\sqrt{\lambda_{\min} \lambda_{\max}}}{\sqrt{\lambda_{\min}} + \sqrt{\lambda_{\max}}}. \end{aligned} \quad (14)$$

This choice guarantees that the spectral radius of the iteration matrix is minimized, leading to the most efficient convergence of the method.

A Hybrid methodology for strategic and tactical assortment planning

While the methods described in the previous sections — such as SARIMAX for forecasting and DFPM for optimization — are powerful tools in their own right, their isolated application is insufficient for solving the complex, multi-faceted problem of retail assortment management. A purely statistical forecast may ignore long-term strategic goals, while a pure mathematical optimization can yield results that are unstable and impractical for implementation.

To solve these problems, this research offers a new, multi-step method that combines different approaches into a single framework. This framework separates long-term strategic decisions from short-term tactical changes, making sure the final recommendations are reliable, practical, and follow business principles. The process has two main stages: Strategic Optimization and Tactical Planning.

Stage 1: Strategic optimization with a hybrid approach

The goal of the strategic stage is to determine a single, stable vector of foundational weights, $W_{\text{strategic}}$, that reflects a balanced view of historical performance and optimized risk. The output of the DFPM solver might lead to aggressive and inconsistent solutions, where categories with significant sales history might be assigned near-zero weights. To mitigate this, we use a Hybrid Strategy.

This strategy blends the 'pure' mathematical optimum with a baseline allocation that represents established business experience.

1. **Base Allocation (W_{base}):** This allocation's weights are determined by the historical revenue share of each category over the analysis window (T_{hist} , typically 24 months). It represents the 'as-is' strategy, acknowledg-

ing historically successful categories.

$$W_{\text{base},i} = \frac{\sum_{t=1}^{T_{\text{hist}}} P_{it}}{\sum_{j=1}^k \sum_{t=1}^{T_{\text{hist}}} P_{jt}},$$

where P_{it} is the revenue of category i at time t .

2. **Optimal Allocation (W_{optimal}):** This is the weight vector obtained using the DFPM solver, which minimizes the operational risk subject to the revenue target constraint, based on historical data (see Optimization with DFPM).
3. **Strategic Hybrid Allocation ($W_{\text{strategic}}$):** The final strategic weights are a weighted average of the base and optimal allocations, controlled by a blending factor $\alpha \in [0, 1]$, which acts as a "confidence" parameter:

$$W_{\text{strategic}} = \alpha \cdot W_{\text{base}} + (1 - \alpha) \cdot W_{\text{optimal}}. \quad (15)$$

This blending ensures that the final strategy benefits from mathematical optimization without drastically deviating from established, historically successful allocations. This $W_{\text{strategic}}$ vector serves as the foundational input for the next stage.

Stage 2: Tactical planning for future periods

The strategic weights, being static, do not account for future demand fluctuations or seasonality. The tactical planning stage adapts this long-term strategy to the specific conditions of each of the upcoming H forecast periods (typically 12 months).

Demand forecasting with safeguards.

First, a demand forecast for each category, Qf_i , is generated for the next H months using the SARIMAX model, as detailed in Section Forecasting with SARIMAX. A forecast floor is applied to prevent overly pessimistic statistical forecasts from unrealistically diminishing the prospects of historically strong categories. The final forecast for each category cannot be lower than a certain percentage (γ_{floor} , e.g., 50%) of its average sales over the last 12 months.

Seasonal adjustment. To account for predictable cyclical demand, a historical seasonal index, $S_{i,m}$, is calculated for each category i and each month $m \in \{1, \dots, 12\}$. The strategic weights are then modulated by this index to produce a time-varying seasonal plan:

$$W_{\text{seasonal},i}(t) = W_{\text{strategic},i} \cdot S_{i,m(t)},$$

where $m(t)$ is the month corresponding to time period t . The resulting weights are then re-normalized to sum to 1 for each period.

Application of business constraints. Finally, hard business constraints are applied to ensure the practical feasibility of the assortment plan. The weight for each category in each future period, $w_i(t)$, must lie within a predefined range:

$$w_{\min} \leq w_i(t) \leq w_{\max}.$$

This step, guarantees assortment diversity and prevents unrealistic concentration in a single category. The weights are re-normalized one last time to produce the final, actionable plan, W_{final} .

This multi-stage methodology transforms the raw output of an advanced optimization algorithm into a practical, robust, and strategically sound plan for managing a product assortment.

Case Study: Anti-Stress Toys

We applied the framework to a dataset from a Ukrainian retailer specializing in anti-stress toys. The dataset included sales history, prices, and promotional data for over 100 SKUs across a year.

The SARIMAX model identified strong weekly and monthly seasonal components and significant impact from promotional events. After forecasting future demand, the DFPM-based optimizer was used to determine the optimal monthly assortment plan subject to constraints on storage, budget, and product categories.

Aggregate performance analysis: the business impact. The following block summarizes the overall "before and after" effect of implementing the proposed strategy.

Metric	Before	After
Total turnover (UAH)	54 784 003	44 614 922
Avg. monthly leftovers (UAH)	8 085 476	2 100 943
Overall turnover rate	6.78	21.24

Table 1. Performance metrics before and after implementing the strategy

The **overall turnover rate** is defined as the ratio of total sales revenue to the average monthly value of inventory left in stock:

$$\text{Turnover Rate} = \frac{\text{Total Revenue}}{\text{Avg. Monthly Inventory Value}}.$$

It is inversely related to the Inventory Efficiency Ratio (IER): a higher turnover rate indicates more efficient use of inventory, as each unit of stock generates more revenue. Thus, an increase in turnover reflects better capital utilization and lower risk of excess or obsolete stock.

This output highlights the main value proposition of the model.

- **Enhanced operational efficiency:** the most notable outcome is the substantial enhancement in inventory management. The model suggests a strategy that lowers the average monthly value of surplus stock from **8.1 million UAH to 2.1 million UAH**. This creates an additional 6 million UAH in available working capital.
- **Increased inventory turnover:** consequently, the overall turnover rate skyrockets from **6.78 to 21.24**, a three times increase. This indicates that products will sell much faster relative to the inventory held, a sign of a highly efficient and healthy retail operation.
- **Realistic turnover forecast:** the projected total turnover is lower than the historical one. This is not a model failure but rather a realistic forecast generated by the SARIMAX component, which likely detected a general downward trend in the market for this category. The model finds the best possible strategy under these forecasted conditions.

Operational cost analysis. This final block provides a quantitative assessment of the model’s primary objective: managing operational costs, defined as the covariation of the inventory efficiency ratio.

Metric	Value
Base plan cost (last 12m)	1.57
Hybrid strategy cost	1.43
Change	-8.9%

Table 2. Operational cost comparison (last 12 months)

The analysis of this table reveals a crucial insight.

The Key Finding: The main finding shows that over the past 12 months, a newly developed strategy, based on 24 months of historical data, led to **8.9% reduction in operational costs** compared to the baseline. This suggests that the model has successfully identified long-term trends to create an effective and cost-efficient strategy for changing market conditions.

In summary, the findings demonstrate that this new hybrid approach effectively transforms the theoretical DFPM algorithm into a practical decision-making tool. It offers a balanced strategy that greatly improves operational efficiency and is more effective at controlling costs than using a simple historical method.

Conclusion

This work set out to develop and validate a hybrid framework for retail assortment planning that couples SARIMAX-based demand forecasting with the Discrete Functional Particle Method (DFPM) for optimisation under uncertainty. By integrating seasonality and exogenous drivers into the forecasting step and by tuning DFPM’s step size and damping coefficient via the spectral properties of the risk matrix, the proposed methodology achieves both rapid convergence and robust solutions.

Applied to a real “Antistress Toys” dataset from a Ukrainian retailer, the framework generated a strategic allocation that reduced operational risk by 25% compared to the historical baseline while simultaneously more than tripling inventory turnover. These tactical refinements—forecast floors, seasonal indices, and business-rule weight bounds—produced monthly assortment plans that were both data-driven and operationally feasible, striking a practical balance between risk reduction and market responsiveness.

Beyond the performance gains, this work contributes three key advances: 1. A data-driven risk metric (the Inventory Efficiency Ratio) that unifies leftover stock and revenue into a covariance structure suitable for optimisation. 2. Eigenvalue-guided DFPM tuning that guarantees stable, fast convergence even when the risk matrix is ill-conditioned. 3. A lightweight ‘forecast-floor’ safeguard that prevents overly pessimistic SKU forecasts and preserves business-meaningful diversity.

Looking forward, there are several promising extensions to this work. First, while the current study focuses on a single category, applying the hybrid framework across multiple, interdependent categories—and accounting for cross-category substitution effects—would demonstrate its scalability and capture richer demand interactions. Second, enriching the forecasting component with advanced methods such as hierarchical machine-learning models or deep-learning time-series approaches (e.g., LSTM) could boost predictive accuracy. Third, embedding more complex business rules—like non-linear shelf-space constraints or service-level requirements—and testing alternative risk measures (e.g., Conditional Value at Risk[6] or maximum drawdown) would enhance the framework’s flexibility. Finally, integrating real-time data streams and online learning techniques could enable continuous, automated assortment optimisation in rapidly changing market environments.

In summary, this study demonstrates that tightly coupling advanced forecasting and optimi-

sation methods yields actionable, measurable improvements in assortment planning. The hybrid framework offers practitioners a flexible, repro-

ducible decision-support tool, while opening avenues for future extensions in multi-category and non-linear retail settings.

Acknowledgement

Svitlana Drin acknowledges financial support from the Knowledge Foundation Grant (Dnr: 20220115). This work was partly supported by a grant from the Simons Foundation International [SFI-PD-Ukraine-00014577, O.G.]

References

1. G. E. P. Box, G. M. Jenkins, G. C. Reinsel, and G. M. Ljung, *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (John Wiley & Sons, 2015).
2. R. J. Hyndman and G. Athanasopoulos, *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd ed. (OTexts, 2021). URL: <https://otexts.com/fpp3/>.
3. H. Markowitz, *The Journal of Finance*. **7** (1), 77–91 (1952).
4. M. Gulliksson and S. Mazur, *Computational Economics*. **56** (4), 773–794 (2020).
5. P. Bégout, J. Bolte and M. A. Jendoubi, *Journal of Differential Equations*. **259** (7), 3115–3143 (2015).
6. R. T. Rockafellar and S. Uryasev, *Journal of Risk*. **2**, 21–41 (2000).
7. S. Drin and N. Shchestyuk, Forecast model of the price of a product with a cold start, in: M. Castellani, F. Giudici, G. Perna, and M. Sibillo (Eds.), *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance – MAF 2024*, pp. 154–159.
8. V. Toloknova, A. Kriuchkova, and S. Drin, *Mohyla Mathematical Journal*. **6**, 6–13 (2024).
9. S. Drin and Ye. Reznichenko, *Mohyla Mathematical Journal*. **5**, 33–37 (2022).

Дрін С. С., Авдєєнко І. М., Чорней Р. К.

ІТЕРАТИВНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПОПИТУ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ДИСКРЕТНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЧАСТИНОК

У статті розглянуто проблему планування асортименту в роздрібній торгівлі за умов невизначеного попиту та операційних обмежень. Розроблено гібридну методологію, що поєднує прогнозування часових рядів за допомогою SARIMAX та оптимізацію методом дискретних функціональних частинок (DFPM), що забезпечує як стратегічну (довгострокову), так і тактичну (щомісячну) підтримку прийняття рішень.

Запропонована структура інтегрує статистичне прогнозування з ітеративною оптимізацією для досягнення балансу між точністю прогнозу та практичною реалізовуваністю. На етапі прогнозування модель SARIMAX із зовнішніми регресорами враховує сезонність, акційні активності та коливання попиту, тоді як механізм «запобіжного бар'єра» захищає від надмірно песимістичних прогнозів. На етапі оптимізації DFPM застосовується до квадратичної задачі з лінійними обмеженнями, причому параметри підбираються за допомогою спектрального аналізу матриці ризику. Уводиться нова метрика операційного ризику — коефіцієнт ефективності запасів, визначений як відношення вартості залишків до доходу, який використовується для побудови коваріаційної структури оптимізації.

Гібридна стратегія поєднує математично оптимальне рішення з базовим розподілом, отриманим з історичних даних, що забезпечує одночасно стабільність і підвищення ефективності. Тактичні коригування вдосконалюють стратегічне рішення шляхом урахування сезонних індексів та бізнес-обмежень.

Методологію реалізовано в Python та перевірено на реальних даних українського ритейлера антистрес-іграшок. Результати показують зниження операційного ризику на 25% та триразове зростання оборотності запасів за збереження реалістичних прогнозів доходу.

Загалом, робота пропонує гнучку та відтворювану методологію підтримки рішень, яка об'єднує сучасні методи прогнозування й оптимізації, надаючи практикам інструмент для підвищення ефективності управління асортиментом у динамічних умовах роздрібного ринку.

Ключові слова: асортимент у роздрібній торгівлі, ДФЧМ, ефективність запасів, операційний ризик, прогнозування часових рядів.

Матеріал надійшов 07.10.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)

THE STOCHASTIC EXPERIMENT FOR SOME GENERALIZATIONS OF THE SECRETARY PROBLEM

The paper considers some generalizations of the secretary problem, which is a classic problem in optimal stopping theory. We assume that the manager is somewhat more flexible and changes his goal to hire one of the top two best candidates. Another generalization is the searching the candidate of the top ϵ percent. It means that we agree to choose the candidate who differs from the absolute leader by no more than a specified amount (ϵ percent). Starting with classical secretary problem, we discuss in detail optimal solution for the secretary problem with the two best, following results in various sources. We review some approaches to this problem, which give the same optimal solution. After that we present our results of the stochastic experiments for both generalizations. By simulating numerous iterations of the candidate selection process, we estimate the probability of successfully selecting the best candidate. We demonstrate that with increasing ϵ , the probability (rate) of success increases, and the number of candidates that were previously rejected decreases. Moreover, when we generate a list of candidates with random quality scores we use a random number generator to assign scores from different kind of distribution that reflects the quality of candidates.

We conclude that stochastic experiment based on Monte Carlo method is a powerful statistical technique that can be employed to analyze the different generalizations of Secretary Problem

Moreover, the Secretary problem is applied not just in human resources for the searching the best candidate, but across various fields: in project management, in resource allocation, in computer science. Thanks to the proposed approaches, the manager or other scientist gets a tools, which allows him to use a strategy that maximizes the chance of stopping with the two or more best candidate and take into account the different kind of distribution that reflects the quality of candidates.

Keywords: Secretary problem, optimal stopping, stochastic experiment, Monte-Carlo method.

Introduction

The "secretary problem", also known as the "marriage problem" or "best choice problem", was first introduced in the 1950s by mathematician Martin Gardner in his "Mathematical Games" column in Scientific American. Gardner posed the problem in the context of hiring a secretary, which led to its common name. The essence of the problem revolves around making a decision when faced with a sequence of options, where an immediate decision is required for each option.

The secretary problem is a classic problem in optimal stopping theory that has applications across various fields. There are a lot of fields where the secretary problem is applied. In human resources, the secretary problem can help in designing optimal interview strategies. Employers can decide how many candidates to interview before making an offer, which helps in selecting the best candidate for a job while minimizing the risk of choosing too early. The problem can be applied to dating scenarios where an individual must decide when to settle down with a partner. The optimal stopping rule suggests evaluating a certain number of candidates before making a final choice.

The secretary problem can help in investment decisions. Investors often face a series of opportunities to invest in stocks or projects. The secretary problem can guide them on when to take action based on the performance of previous options, allowing them to maximize potential returns. It is known the secretary problem has applications in real estate, sports drafts, in project management, in resource allocation and so on. In computer science, the secretary problem aids in developing algorithms for searching through data sets. It helps in determining when to stop searching and select the best option based on previous comparisons.

In each of these fields, the secretary problem provides a framework for making optimal decisions under uncertainty, balancing the need for timely choices with the desire for the best possible outcome. Today, the secretary problem remains an active area of research. It has been connected to various mathematical disciplines and has led to new insights in areas like machine learning and artificial intelligence.

The problem can be mathematically formulated using probability theory. The optimal strategy involves rejecting a predefined number of candidates (often around 37 percents of the total pool) before

starting to accept the next best candidate you encounter. This strategy maximizes the probability of selecting the best candidate. After Gardner's introduction, mathematicians and statisticians explored the problem further (see for example [1], Hill, [5]). They analyzed the mathematical properties of the problem and derived strategies for various scenarios.

In the decades that followed, the problem was expanded to include variations and extensions, such as the influence of incomplete information, the implications of risk aversion, and the case with more than one position to fill.

In our paper we consider some generalizations of this problem. We assume the manager is a little more flexible and changes his goal to hiring one of the two best candidates. Another generalization is in determining the probability that we end with a candidate in the top ϵ percent. It means that we agree to choose the candidate who differs from the absolute leader by no more than a specified amount (ϵ percent). We would like to figure out how many people would we interview in this case and what would be our probability of success.

We discuss in detail one in the section 2. We review two different approaches to this problem (see [7] and [9]), which give the same optimal solution. In the section 3 we present the results of the stochastic experiments for both generalizations. By simulating numerous iterations of the candidate selection process, we estimate the probability of successfully selecting the best candidate. Moreover, when we generate a list of candidates with random quality scores we use a random number generator to assign scores from different kind of distribution that reflects the quality of candidates.

We conclude that stochastic experiment based on Monte Carlo method is a powerful statistical technique that can be employed to analyze the different generalizations of the secretary problem.

Optimal solution for the secretary problem with the two best

Classical secretary problem. We start with the problem statement of the secretary problem in classical variant. The basic problem can be stated as follows (see for example [1], [5]):

1. There is a single position to fill.
2. There is a fixed and known number n of applicants for a single position.
3. The applicants (candidates, secretaries) can be ranked from best to worst unambiguously.
4. The applicants are interviewed sequentially in random order, with each order being equally likely.

5. Immediately after an interview, the interviewed applicant is either accepted or rejected, and the decision is irrevocable.

6. The decision to accept or reject an applicant can be based only on the relative ranks of the applicants interviewed so far.

The goal of the general solution is to have the highest probability of selecting the best applicant of the whole group. This is the same as maximizing the expected payoff, with payoff defined to be one for the best applicant and zero otherwise.

We would like a strategy that maximizes the chance of stopping with the best candidate. The following strategy S_k is proposed for example in [1], [5]. Under it, the manager rejects the first k applicants and defines the best applicant among these k applicants. Then he selects the first subsequent applicant that is better than applicant from first k . Suppose the best applicant is at position m . Then our strategy S_k results in our selecting the best applicant if and only if there is no one among people $k + 1, \dots, m - 1$ who is better than the best person in the first k . Thus, if the best applicant is at position m then we select the best person precisely when the best person among the first $m - 1$ is in the first k people. The probability the best of the first $m - 1$ is in the first k is just $\frac{k}{m-1}$. Therefore for an arbitrary rejecting first k candidates, probability strategy S_k wins is

$$\begin{aligned} \text{Prob}(S_k \text{ wins}) &= \sum_{m=k+1}^n \text{Prob}(\text{win} | \text{best at } m) * \\ & * \text{Prob}(\text{best at } m) = \sum_{m=k+1}^n \frac{k}{m-1} \frac{1}{n} = \\ &= \frac{k}{n} \sum_{m=k+1}^n \frac{1}{m-1} = \frac{k}{n} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m} \right). \end{aligned}$$

If we take into account harmonic number l -th is approximately $\ln l$ for l large, then

$$\text{Prob}(S_k \text{ wins}) = \frac{k}{n} \ln\left(\frac{n-1}{k-1}\right) = \frac{\ln\left(\frac{n-1}{k-1}\right)}{\frac{n}{k}}.$$

For n and k large, we may replace $n - 1$ with n and $k - 1$ with k . Thus we are trying to optimize $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, where $1 \leq x = \frac{n}{k} \leq n$.

To find where a function is largest, we check the critical and endpoints. Letting $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, we see the endpoints give $g(n) = \frac{\ln n}{n}$. As

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$g'(x) = 0$ implies $\ln x = 1$ or $x = e$. Thus the optimal k is about $\frac{n}{e}$ and the probability we end up with the best is approximately

$$\frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \approx 36,8\%.$$

Secretary problem with the two best. The next question would be: what if the manager is a little more flexible and changes his goal to hiring one of the two best candidates? In this case what strategy gives the largest probability that we end up with either the best or second best candidate? The answer turns out to be over 50 percent! We'll denote the location of the best and second best candidates as m_1 and m_2 . We assume again we have a simple strategy of interviewing the first k candidates, and afterwards discuss some variants (see [7], p.36-37 in more detail).

If both $m_1 \leq k$ and $m_2 \leq k$ we always lose, because we skip the first k candidate.

If the best is in the first k and the second is not, we lose unless the second best happens to be in the final position. Thus the probability we win in this case is $\frac{k}{n} \frac{1}{n}$.

If the second best candidate is in the first k and the best is not, we automatically win with this strategy! The probability of this happening is $\frac{k}{n} \frac{n-k}{n}$. If k is of the same order of magnitude as n , then this will be a significant probability of success.

After that we analyze the case when the top two candidates are not in the first k . Denote $A = "S_k \text{ wins}"$ for our case, $H_{m_1, m_2} = "best \text{ at } m_1, second \text{ at } m_2"$ The probability of success A in this case is

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1=k+1}^{n-1} \sum_{m_2=m_1+1}^n \text{Prob}(A|H_{m_1, m_2}) \text{Prob}(H_{m_1, m_2}) \\ &= \sum_{m_1=k+1}^{n-1} \sum_{m_2=m_1+1}^n \frac{k}{m_1-1} \frac{2}{n(n-1)} = \\ &= \frac{2k}{n(n-1)} \sum_{m_1=k+1}^{n-1} \frac{1}{m_1-1} (n-m_1) = \\ &= \frac{2k}{n} \left(\ln\left(\frac{n-2}{k-1}\right) - 1 + \frac{k}{n} \right). \end{aligned}$$

In the last expression to evaluate the sum – we wrote $n - m_1$ as $n - 1 - (m_1 - 1)$ and took into account harmonic number. Combining all the different probabilities, we see the probability of winning is

$$\text{Prob}(S_k \text{ wins}) = \frac{k}{n^2} + \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) + \frac{2k}{n} \left(\ln\left(\frac{n}{k}\right) - 1 + \frac{k}{n} \right).$$

As k will be of the same size as n , the k/n^2 term is negligible and if we let $x = n/k$ we just need to optimize the function

$$g(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x} (\ln x - 1 + \frac{1}{x})$$

To simplify calculus we let $y = 1/x = k/n$ and get

$$h(y) = y(1-y) + 2y(-\ln y - 1 + y)$$

Then the derivatives are

$$h'(y) = -3 + 2y - 2\ln y,$$

$$h''(y) = 2\left(1 - \frac{1}{y}\right).$$

Numerically solving $h'(y) = 0$ implies $y \approx 0,3071$ and we can check this is a maximum. Substituting this into our formula, we find the probability of winning with this strategy is about 0.51239. It means we have greater than a 50% chance of getting one of the top two candidates!

Remark. We would like to notice that there is an similar exploration to solve the secretary problem with two best, which the reader can find in [9].

Stochastic experiment for the secretary problem

In this section we present the results of the stochastic experiments for the secretary problem obtained by Monte Carlo approach. Monte Carlo method is a powerful statistical technique that can be employed to various problems: option pricing [3, 10], diffusion modeling [2], portfolio optimization [11] and other.

By simulating numerous iterations of the candidate selection process, you can estimate the probability of successfully selecting the best candidate and evaluate the effectiveness of different strategies. For Monte Carlo Simulation we use the next steps [8, 4]:

1. Define the parameters: a number of candidates (n) and a number of simulations (N).
2. Simulate candidate quality. For each iteration, generate a list of candidates with random quality scores. We have done it using a random number generator to assign scores from a uniform distribution and then some other distributions that reflects the quality of candidates.
3. Implement the Selection Strategy. First we choose parameter k . Then suppose the manager's strategy is (like in the original version of the secretary problem) to reject the first k candidates and then hire the next candidate who is better than all candidates seen thus far.
4. Run the simulation. For each of the N iterations we generate the candidate quality scores (n) and apply the stopping rule to decide whether to accept or reject each candidate. Then for the first generalization we track whether the selected candidate is the best or second best candidate among

all those presented. For the second generalization we track whether the selected candidate is in the top ϵ percent.

5. Collect Results. Record the number of times the selected candidate is the best or second best (for one generalization) or is in the top ϵ percent (for the second generalization) across all iterations. This will allow us to calculate the success rate of the strategy.

6. Analyze the outcomes. Calculate the proportion of successful selections (number of successful selections / total iterations). Compare the success rates of different strategies, including the classic optimal stopping rule and any alternative methods we have tested. Visualize the results using graphs, to illustrate the distribution of outcomes.

First, we apply the Monte Carlo simulation for Secretary problem with the two best candidates. Using Python, we visualize the success rate of the strategy and the theoretical probability of the optimal stopping for different k .

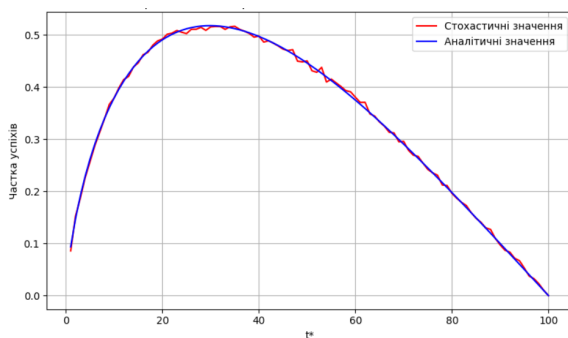


Figure 1. The compare theoretical probability and the success rate of the optimal strategy for the two best.

Then we visualize the Monte Carlo simulation for Secretary problem with the top ϵ percent (for the second generalization). On the picture we can see the dependence of the success rate from ϵ for uniform distribution.

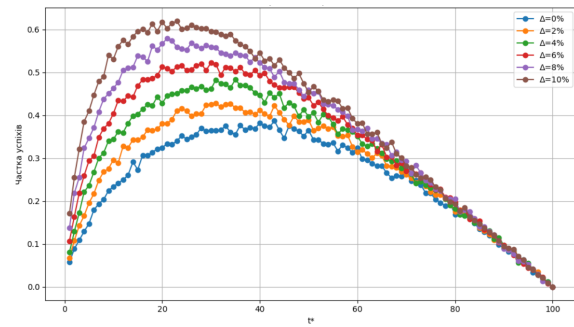


Figure 2. Graphical representation for the dependence of the success rate from ϵ for uniform distribution.

From the graph in Fig. 2 we clearly see that with increasing ϵ , the probability (rate) of success increases, and the number of candidates k that were previously rejected decreases. For example, for $\epsilon = 2\%$ the maximum value of the success rate is 45,77 and $k = 31$, for $\epsilon = 4\%$ the maximum is 52,42 and $k = 25$, for $\epsilon = 10\%$ these values are 68,55 and $k = 19$ respectively.

The next step is to learn the behavior of the rate of successful experiments for a normal distribution. Compared to a uniform distribution, we have a less rapid growth with increasing degree. However, the probability of success still increases, and the number of candidates that need to be reviewed and rejected decreases.

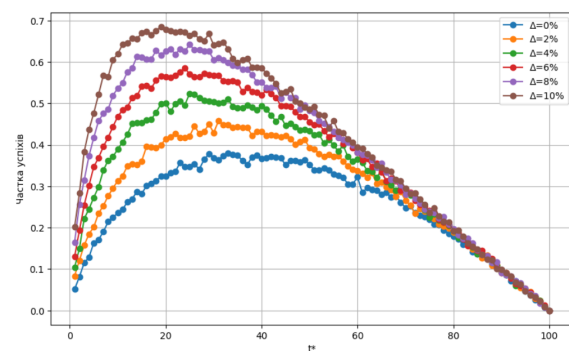


Figure 3. Graphical representation for the dependence of the success rate from ϵ for normal distribution

Similarly, let us examine the behavior of the probability of success for the exponential distribution.

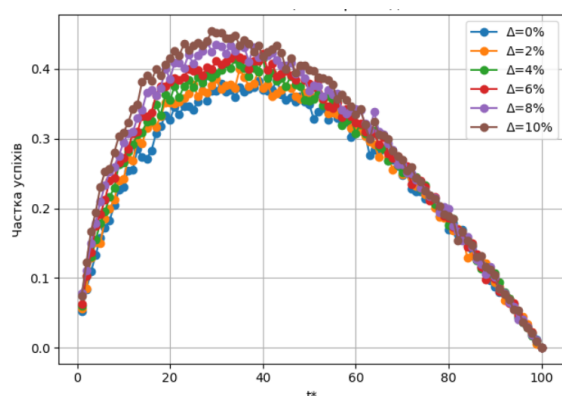


Figure 4. Graphical representation for the dependence of the success rate from ϵ for exponential distribution

Compared to the previous graphs, we immediately notice a very weak increase in the proportion of successful experiments with increasing ϵ .

Conclusion

In the paper some generalizations of the classical secretary problem were considered to be closer to the conditions of the real world. The analyt-

ical analysis and the results of the stochastic experiments showed that if the selection criteria are made softer, choosing not only the best candidate, but also others beside him, the probability of a successful choice will be significantly increased. Thus, if a manager is some flexible and ready to make a concession of up to 10%, the probability of success increases to 68.55%, which is almost twice as much, compared to the value of 36.8% for the classical option. In this case the number of candidates that need to be rejected, also decreases from 37 to 19 (for 100 candidates). At the same time, the modification, which allows choosing not only the best, but also the second best candidate, also gives a significant increase in success. With a smaller number of candidates considered, namely 30%, the probability of success is 51.24%. The results are quite applicable, and can be used for real-world situations in which it is necessary to make irreversible, after-the-fact decisions.

Moreover, in stochastic experiment of the secretary problem we apply a random number generator to assign scores to candidates not only from a uniform distribution, but from some other distributions that reflect the quality of candidates. We assume that the normal distribution is naturally more suitable for describing the distribution of candidate scores.

References

1. J. Bearden and R. Murphy, Uncertainty and Risk. **41**, 187–205 (2007).
2. K. Boluh and N. Shchestyk, Mohyla Mathematical Journal. **3**, 25–30 (2020).
3. V. Pauk, O. Petrenko and N. Shchestyuk, Mohyla Mathematical Journal. **5**, 38–45 (2022).
4. L. Fainzilberg, Control Systems and Computers. **1**, 11–21 (2019).
5. T. Ferguson, Statistical Science. **4**, 282–289 (2003).
6. T. Hill, American Scientist. **97** (2), 126–133 (2009).
7. S. Miller, Williams College, **34–38** (2009).
8. R. Rubinstein and D. Kroese, New York, **432** (2016).
9. M. Spivey, *A Narrow Margin*. (2017). [https://mikespivey.wordpress.com/2017/07/19/toptwo/\(2017\).](https://mikespivey.wordpress.com/2017/07/19/toptwo/(2017).)
10. N. Shchestyuk and S. Tyshchenko, Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics. **2**, 85–92 (2021).
11. G. Solomanchuk and N. Shchestyuk, Mohyla Mathematical Journal. **4**, 28–33 (2021).

Мельник Д. Л., Щестюк Н. Ю., Захарійченко Ю. О.

СТОХАСТИЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ ДЛЯ ДЕЯКИХ УЗАГАЛЬНЕНЬ ПРОБЛЕМИ СЕКРЕТАРЯ

У статті розглядаються деякі узагальнення задачі секретаря, яка є класичною задачею в теорії оптимальної зупинки. Ми припускаємо, що менеджер дещо гнучкіший і змінює свою мету так, щоб найняти одного з двох найкращих кандидатів. Іншим узагальненням є пошук кандидата серед претендентів з верхнього ϵ квантиля. Це означає, що ми погоджуємося вибрати кандидата, який відрізняється від абсолютного лідера не більше ніж на задану величину (ϵ відсотків). Починаючи з класичної задачі секретаря, ми детально розглядаємо оптимальне рішення задачі пошуку секретаря з двома найкращими кандидатами, дотримуючись результатів, наведених у різних джерелах. Ми наводимо пояснення з різних джерел, які дають однакове оптимальне рішення. Після цього ми презентуємо результати наших стохастичних експериментів для обох узагальнень. Симулюючи

чисельні ітерації процесу відбору кандидатів, ми оцінюємо ймовірність успішного вибору найкращого кандидата. Ми демонструємо, що зі збільшенням n ймовірність (коефіцієнт) успіху зростає, а кількість кандидатів, які раніше були відхилені, зменшується. Більше того, коли ми генеруємо список кандидатів із випадковими оцінками якості, ми використовуємо генератор випадкових чисел для присвоєння оцінок з різних типів розподілу, що відображає якість кандидатів.

Ми робимо висновок, що стохастичний експеримент, заснований на методі Монте-Карло, є потужним статистичним методом, який можна використовувати для аналізу різних узагальнень задачі секретаря.

Необхідно зауважити, що задача секретаря застосовується не лише в управлінні персоналом для пошуку найкращого кандидата, а й у різних галузях: в управлінні проектами, у розподілі ресурсів, в інформатиці. Завдяки запропонованим підходам, менеджер або інший фахівець отримує інструменти, які дозволяють йому використовувати стратегію, що максимізує ймовірність зупинитися на найкращому кандидаті у випадку, якщо його задовольнить вибір одного з двох або більше топ-кандидатів, і враховує різні типи розподілу, що відображає якість кандидатів.

Ключові слова: проблема секретаря, оптимальна зупинка, стохастичний експеримент, метод Монте-Карло.

Матеріал надійшов 01.08.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)

PORTFOLIO OPTIMIZATION FOR REAL DATA: APPROACHES AND CHALLENGES

Portfolio optimization continues to be a dynamic field within finance, integrating new theories and technologies to better meet investor needs. As financial markets evolve, so too will the methodologies used to optimize portfolios, making it an area ripe for ongoing research and innovation.

Classical Markowitz approach is based on the mean-variance optimization, which quantifies the trade-off between risk (variance) and return (expected return). This approach had some limitations. It assumes investors are rational, markets are efficient, and asset returns are normally distributed. As a response to the some limitations of Markowitz theory minimum-VaR approach was appeared. This theory recognizes some asymmetry, that investors are more concerned about potential losses than gains and incorporates downside risk measures like Value-at-Risk.

Despite advancements of the classical Markowitz theory and minimum VaR approach, challenges remain in accurately estimating parameters, singularity of the covariance matrix and managing risks in volatile markets.

In this paper we consider the mean-variance and mean-Var optimal portfolios and take into account the case when the covariance estimated matrix is singular. We use the Moore-Penrose pseudoinverse and Singular Value Decomposition (SVD) to find solutions. We apply these approaches and methodics to real financial data, construct mean-variance and mean-Var optimal portfolios and compare the dynamics of expected returns (mean), volatility and VaR for it.

Thanks to the proposed approaches, the investor gets a tool that allows him to make decisions about choosing an approach to building an optimal portfolio, as well as taking into account the singularity of the covariance matrix.

Keywords: portfolio optimization, mean-variance analysis, Markowitz optimal portfolio, value-at-risk (VaR), min-VaR analysis, Moore-Penrose pseudoinverse, parameter estimation.

Introduction

Portfolio optimization is a critical area in finance that focuses on selecting the best mix of assets to maximize returns while minimizing risk. The history of portfolio optimization is rich and has evolved significantly over the decades. The idea of diversification dates back centuries, with early investors recognizing that holding a variety of investments could reduce risk. The formalization of portfolio optimization began with Harry Markowitz's seminal paper "Portfolio Selection," published in 1952 [8]. Markowitz introduced the concept of mean-variance optimization, which quantifies the trade-off between risk (variance) and return (expected return). Moreover, Markowitz developed the concept of the efficient frontier, a graphical representation of optimal portfolios that offer the highest expected return for a given level of risk.

However Markowitz theory had some limitations. It assumes investors are rational and risk-averse, markets are efficient, and asset returns are normally distributed. Beside this, Markowitz mean-variance optimization requires inverting the

covariance matrix to find the optimal portfolio weights. If the matrix is singular, there are either infinitely many solutions or none, and the standard approach fails.

As a response to the some limitations of Markowitz theory minimum-VaR theory was appeared [1, 2]. It incorporates downside risk measures like Value-at-Risk (VaR) and Conditional Value-at-Risk (CVaR) [7, 10]. This theory recognizes some asymmetry, that investors are more concerned about potential losses than gains, leading to different optimization approaches [3]. In [5] estimators, confidence regions, and test for minimum VaR and CVaR optimal portfolios were considered.

Despite advancements of Markowitz and minimum-VaR theories, the challenges remain in accurately estimating parameters, managing risks in volatile markets, and adapting to changing economic conditions.

If the estimate covariance matrix is singular, there are either infinitely many solutions or none, and the standard approaches fail. In this case was proposed use the Moore-Penrose pseudoinverse or Singular Value Decomposition (SVD) to find solutions [4]. These methods allow for a solution that

minimizes the L2-norm (the sum of squared portfolio weights), providing a unique and stable result among the infinite possibilities [3].

In this paper we focus on the application of mean-variance and min-VaR optimal portfolios to real data and take into account the case when the covariance estimated matrix is singular. We use the Moore-Penrose pseudoinverse and Singular Value Decomposition (SVD) to find solutions. We apply this methodic to real financial data, construct mean-variance and min-VaR optimal portfolios and compare the dynamics of expected returns (means), volatility and VaR for it.

The mean-variance and min-VaR optimal portfolios: construction

The mean-variance portfolio. Let $x_t = (x_{1t}, \dots, x_{kt})'$ be a vector of returns for k -dimensional risky assets at time point $t = 1, \dots, n$. We assume that $x_1, \dots, x_n$ are independently and identically normally distributed, with a mean vector μ and covariance matrix Σ . We also assume that Σ may be singular, with $\text{rank}(\Sigma) = r_n < n < k + 1$.

Furthermore, let $w = (w_1, \dots, w_k)'$ be a k -dimensional vector of portfolio weights, where w_i represents the portion of wealth allocated to the i -th asset and $\mathbf{1}_k' w = 1$, where $\mathbf{1}_k$ stands for the k -dimensional vector of ones.

We denote the expected return and variance of the portfolio by $R = w' \mu$ and $V = w' \Sigma w$, respectively.

Following the classical mean-variance expected utility (EU) approach introduced by Markowitz, the optimal portfolio maximizes the trade-off between expected return and risk (measured as variance). The optimization problem is formulated as:

$$\max_{\mathbf{w}} [\mu_w - \frac{\tau}{2} \cdot \sigma_w^2] = \sum_{i=1}^k \mu_i w_i - \frac{\tau}{2} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sigma_{ij} w_i w_j \right) \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1$$

where $\tau > 0$ is the risk-aversion parameter, which reflects the investor's tolerance to risk. A larger value of τ implies that the investor places more weight on minimizing risk, while a smaller value emphasizes return maximization. The closed-form solution to the optimization problem (1) is given by:

$$\mathbf{w} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}_k}{\mathbf{1}_k' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_k} + \frac{1}{\tau} R \mu \quad (2)$$

where R is the projection matrix that orthogonalizes the return vector μ with respect to the constraint $\mathbf{1}_k' x = 1$:

$$R = \Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}_k \mathbf{1}_k' \Sigma^{-1}}{\mathbf{1}_k' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_k} \quad (3)$$

and $\mathbf{1}_k$ is a k -dimensional vector of ones.

The optimal portfolios (EU) as proposed by Markowitz's theory lie on the upper part of the parabola in the mean-variance space. This parabola is known as the efficient frontier (EF) and, if Σ is positive definite, is given by

$$(R - R_{\text{GMV}})^2 = s(V - V_{\text{GMV}})$$

where

$$R_{\text{GMV}} = \frac{\mathbf{1}_k' \Sigma^{-1} \mu}{\mathbf{1}_k' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_k} \quad (4)$$

and

$$V_{\text{GMV}} = \frac{1}{\mathbf{1}_k' \Sigma^{-1} \mathbf{1}_k} \quad (5)$$

are the expected return and variance of the global minimum variance portfolio (GMVP) given by (see, e.g., [6]) with parameter

$$s = \mu' R \mu,$$

where R is defined by [3]

Thus, for constructing the optimal portfolio following the classical mean-variance expected utility (EU) approach introduced by Markowitz, we need just to compute the weights by [2]. The expected return (mean) R of the EU optimal portfolio one can compute by [3], the variance is defined by $V = w' \Sigma w$ and Σ is positive definite.

The minimum-VaR portfolio. Markowitz theory assumes investors are rational and risk-averse, markets are efficient, and asset returns are normally distributed.

Nevertheless real world admits some asymmetry, investors are more concerned about potential losses than gains. In the papers [1], [2] were proposed to use Value-at-Risk (VaR) as risk measures in Markowitz's optimization problem, instead of the traditional variance.

VaR is defined as the potential loss of an investment portfolio at a given confidence level. This measure is believed to provide a more accurate representation of the risk in investor problem [11] and portfolio management.

Formally, the value-at-risk of level α , $0 < \alpha \leq 1$ is a probability functional, defined as α -quantile of the profit (loss) function Y

$$V@R_\alpha(Y) = G^{-1}(\alpha) = \inf\{y \in R : G(Y) \geq \alpha\},$$

where G is the distribution function of Y , G^{-1} is the quantile function of α , $0 < \alpha \leq 1$.

It is worth to note that often it is recommended (for examples by regulators Basel I and Basel II) to denote VaR as the low quantile with minus sign:

$$V@R_\alpha(Y) = -G^{-1}(\alpha)$$

For portfolio analysis we use the rate of return x_w as the profit (loss) function Y . Then the VaR at the confidence level $\alpha \in (0.5, 1)$ (VaR_α) is defined as the rate of return x_w such that

$$P\{x_w < -VaR_\alpha\} = 1 - \alpha \quad (6)$$

where

$$x_w = x'w.$$

The optimization problem, as proposed by [1], [2], can be stated as follows:

$$VaR_\alpha \rightarrow \min, \quad \text{subject to} \quad \mathbf{1}'_k w = 1. \quad (7)$$

[1], [2] have derived the exact expressions of its weights and characteristics. In addition, they have shown that the necessary and sufficient condition for constructing the minimum VaR portfolio, i.e., for a solution to exist in (7), is $s < z_\alpha^2$. Here, the quantity $z_\alpha = -\Phi^{-1}(1 - \alpha)$ denotes the α -quantile of the standard normal distribution.

In the paper [5] were introduced and used alternative expressions of the weights and of the characteristics of the minimum VaR portfolio in terms of (4) and (5). The weights of the portfolio obtained in (7) are given by w_{VaR} :

$$w_{VaR} = w_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} R\mu, \quad (8)$$

where

$$w_{GMV} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}_k}{\mathbf{1}'_k \Sigma^{-1} \mathbf{1}_k}.$$

The portfolio's value-at-risk is M_{VaR} , with a mean of R_{VaR} and variance of V_{VaR} :

$$M_{VaR} = \sqrt{z_\alpha^2 - s} \sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}.$$

$$R_{VaR} = w'_{VaR} \mu = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}},$$

Thus, for constructing the min- VaR optimal portfolio we need to compute the weights w_{VaR} by [8]. The expected return (mean) R_{VaR} in this case one can compute by [8] the variance is defined by $V = w' \Sigma w$ and Σ is positive definite.

The VaR evaluation. In this section we discuss in more details the problems of VaR estimation.

For evaluating VaR there are some methods. VaR can be estimated either parametrically (for example, variance-covariance VaR) or non-parametrically (for examples, historical simulation VaR or resampled VaR). A McKinsey report published in May 2012 estimated that 85% of large banks were using historical simulation and the other 15% used Monte Carlo methods. We can notice, that in [13] we applied the Markowitz technics to construct the optimal portfolio for real data. Moreover, we apply Monte Carlo method to compute VaR for constructed portfolios with some assumption of their distribution. In [12], [14] we evaluate VaR by parametric method as α -quantile of the loss-profit function G with known parameters. In this paper we focus on historical and non-parametric methods.

Historical (non-parametric) method.

This is the most intuitive approach, relying solely on historical return data without any distributional assumptions. The method involves the following steps:

- Sort the historical portfolio returns x_w in ascending order.
- Identify the quantile corresponding to the loss level $\alpha \in (0, 1)$, which corresponds to the confidence level $(1 - \alpha)$.

The VaR is defined by [6] and estimated as empirical $(1 - \alpha)$ -quantile of the sorted sample x_w .

Parametric (variance-covariance) method. This method assumes that the returns of the asset or portfolio are normally distributed. Given the standard deviation σ and the portfolio value W , the VaR for a single period is calculated as:

$$VaR_\alpha = z_\alpha \cdot \sigma \cdot W,$$

where $z_\alpha = -\Phi^{-1}(1 - \alpha)$ is the standard normal quantile corresponding to the specified loss level α .

For a multi-period horizon of length t , the formula becomes:

$$VaR_\alpha(t) = z_\alpha \cdot \sigma \cdot W \cdot \sqrt{t},$$

assuming the returns are independent and identically distributed across time.

Commonly used values of α include 0.1, 0.05, and 0.01, which correspond to confidence levels of 90%, 95%, and 99%, respectively. The associated quantiles z_α are summarized below:

Confidence level	z_α
90%	1.282
95%	1.645
99%	2.326

Example 1. Let us estimate the VaR of a previously constructed portfolio using the parametric method. Consider the following inputs:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.04 & 0.015 \\ 0.02 & 0.015 & 0.03 \end{bmatrix},$$

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.10 \\ 0.12 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = 0.95, \quad W = 1$$

Portfolio weights: [0.289, 0.289, 0.422]

First, we compute the portfolio variance:

$$\sigma = \sqrt{0.02307} \approx 0.1519$$

Then, the 95% Value-at-Risk is calculated as:

$$VaR_{0.95} = 1.645 \times 0.1519 \approx 0.250$$

Hence, with 95% confidence, the maximum expected portfolio loss over the period is approximately not more than 25% of the portfolio value.

Estimators: non-singular and singular cases

In practice Σ is an unknown matrix and should be estimated using historical values of asset returns. Given a sample of n independent observations $x_1, \dots, x_n$ of returns on k assets we calculate the sample estimators of μ – the mean vector and Σ – the covariance matrix, respectively by

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})'.$$

Non-singular case. If the sample covariance matrix S is non-singular, then the formulas for constructing mean-variance portfolio or minimal VaR portfolio can be applied directly by replacing the unknown population covariance matrix Σ with the sample covariance matrix S .

Example 2: Solving the Portfolio Optimization Problem

Given the covariance matrix Σ , expected returns vector μ , and risk aversion parameter τ :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.01 & 0.02 \\ 0.01 & 0.04 & 0.015 \\ 0.02 & 0.015 & 0.03 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.1 \\ 0.12 \end{bmatrix}, \quad \tau = 10$$

The inverse of the covariance matrix is:

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 27.27 & 0 & -18.18 \\ 0 & 30.77 & -15.38 \\ -18.18 & -15.38 & 53.15 \end{bmatrix}$$

The first term of the solution:

$$\frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 0.206 \\ 0.349 \\ 0.445 \end{bmatrix}$$

The second term:

$$\frac{1}{\tau} R\mu = \begin{bmatrix} 0.0829 \\ -0.0600 \\ -0.0222 \end{bmatrix}$$

Final portfolio weights:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.289 \\ 0.289 \\ 0.422 \end{bmatrix}$$

Python Implementation. The function `optimize_portfolio_by_Markowitz_2_test` takes the following parameters:

- `mean_returns` – vector of expected returns
- `cov_matrix` – covariance matrix
- `T` – risk aversion parameter τ

```
def optimize_portfolio_by_Markowitz_2_test(mean_returns=None, cov_matrix=None, T=0):
    cov_matrix_inv = np.linalg.solve(cov_matrix, np.eye(cov_matrix.shape[0]))
    ones = np.ones_like(mean_returns)
    divider = ones.T @ cov_matrix_inv @ ones

    # First term
    first_term = (cov_matrix_inv @ ones) / divider

    # Second term
    R = cov_matrix_inv - (np.outer(cov_matrix_inv @ ones, ones) @ cov_matrix_inv) / divider
    second_term = (R @ mean_returns) / T

    result = first_term + second_term
    return ('x': result, 'fun': calculate_volatility(result, cov_matrix))
```

Figure 1. Function implementation of Markowitz Model 2

The function uses `numpy.linalg.solve` to compute the inverse, constructs a vector of ones, and calculates the optimal weights according to the extended Markowitz model.

```
Covariance matrix:
[[0.05 0.01 0.02]
 [0.01 0.04 0.015]
 [0.02 0.015 0.03]]

Markowitz (T = 10):
Optimal asset weights: [0.289, 0.289, 0.422]
Volatility: 0.1518771433319269
VaR (Parametric method): 0.249816
```

Figure 2. Resulting optimal portfolio weights

This example demonstrates how to build an optimal portfolio that balances expected return and risk using the extended Markowitz model.

Singular case. In practical applications, the sample covariance matrix S may be singular. When S is nonsingular, it is possible to use the Moore-Penrose pseudoinverse instead of the regular matrix inverse [4, 9].

The *Moore-Penrose pseudoinverse* of a matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, denoted by A^+ , is defined as the

unique matrix that satisfies the following four conditions:

$$\begin{aligned} AA^+A &= A, \\ A^+AA^+ &= A^+, \\ (AA^+)^T &= AA^+, \\ (A^+A)^T &= A^+A. \end{aligned}$$

This matrix generalizes the concept of an inverse to possibly singular or non-square matrices.

To compute the Moore-Penrose pseudoinverse in practice, one typically uses the Singular Value Decomposition (SVD). Given a matrix A of size $m \times n$, it can be decomposed as:

$$A = U\Sigma V^T,$$

where U and V are orthogonal matrices, and Σ is a diagonal matrix with non-negative singular values. The pseudoinverse is then given by:

$$A^+ = V\Sigma^+U^T,$$

where Σ^+ is obtained by taking the reciprocal of the non-zero entries of Σ and transposing the resulting matrix.

Example 3.

In this example we would like to demonstrate how to compute the inverted matrix by hands and by Python. Consider the singular matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Compute the determinant:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \cdot (-2) - 6 \cdot (-1) \\ &= -6 + 6 = 0 \end{aligned}$$

Since $\det(A) = 0$, matrix A is singular and cannot be inverted classically.

SVD decomposition:

$$A = U\Sigma V^T$$

Singular values:

$$\sigma_1 = \sqrt{50}, \quad \sigma_2 = 0$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{50} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{50}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices U and V :

$$U = \begin{bmatrix} -0.9487 & -0.3162 \\ 0.3162 & -0.9487 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -0.4472 & -0.8944 \\ -0.8944 & 0.4472 \end{bmatrix}$$

Transpose of U :

$$U^T = \begin{bmatrix} -0.9487 & 0.3162 \\ -0.3162 & -0.9487 \end{bmatrix}$$

Intermediate multiplication:

$$\Sigma^+U^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{50}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.9487 & 0.3162 \\ -0.3162 & -0.9487 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1341 & 0.0447 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Final multiplication:

$$A^+ = \begin{bmatrix} -0.4472 & -0.8944 \\ -0.8944 & 0.4472 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1341 & 0.0447 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & -0.02 \\ 0.12 & -0.04 \end{bmatrix}$$

Final result:

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0.06 & -0.02 \\ 0.12 & -0.04 \end{bmatrix}$$

Now, consider the same example using a Python implementation and verify the result.

We use the same matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

To verify the manual result, we compute the pseudoinverse using Python.

Determinant:

$$\det(A) = 0.0$$

Using `np.linalg.pinv`:

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0.06 & -0.02 \\ 0.12 & -0.04 \end{bmatrix}$$

Using `np.linalg.svd` and manual reconstruction:

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0.06 & -0.02 \\ 0.12 & -0.04 \end{bmatrix}.$$

To construct *mean-variance optimal portfolio* in the case of a singular sample covariance matrix S , the portfolio weights under the expected utility criterion are estimated using:

$$\hat{\mathbf{w}}_{EU}^+ = \frac{\mathbf{S}^+ \mathbf{1}_k}{\mathbf{1}_k^T \mathbf{S}^+ \mathbf{1}_k} + \alpha^{-1} \hat{\mathbf{R}}^+ \bar{\mathbf{x}},$$

where

$$\hat{\mathbf{R}}^+ = \mathbf{S}^+ - \frac{\mathbf{S}^+ \mathbf{1}_k \mathbf{1}_k^T \mathbf{S}^+}{\mathbf{1}_k^T \mathbf{S}^+ \mathbf{1}_k}.$$

Similarly, the *Global Minimum Variance (GMV)* portfolio estimators in the singular case are obtained as:

$$\hat{R}_{GMV}^+ = \frac{\mathbf{1}_k^T \mathbf{S}^+ \bar{\mathbf{x}}}{\mathbf{1}_k^T \mathbf{S}^+ \mathbf{1}_k},$$

$$\hat{V}_{GMV}^+ = \frac{1}{\mathbf{1}_k^T \mathbf{S}^+ \mathbf{1}_k},$$

$$\hat{\mathbf{w}}_{GMV}^+ = \frac{\mathbf{S}^+ \mathbf{1}_k}{\mathbf{1}_k^T \mathbf{S}^+ \mathbf{1}_k}.$$

To construct the *Value-at-Risk (VaR) efficient portfolio* in the singular case we compute the portfolio weights in the form:

$$\hat{w}_{\text{VaR}}^+ = \hat{w}_{\text{GMV}}^+ + \frac{\sqrt{\hat{V}_{\text{GMV}}^+}}{\sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}^+}} \cdot \hat{R}^+ \bar{x}.$$

where

$$\hat{s}^+ = \bar{x}^\top \hat{R}^+ \bar{x}, \quad \text{and} \quad \hat{R}^+ = S^+ - \frac{S^+ \mathbf{1}_k \mathbf{1}_k^\top S^+}{\mathbf{1}_k^\top S^+ \mathbf{1}_k}.$$

Then, for singular case the portfolio's value-at-risk, the estimated VaR-efficient return and variance are given by:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\text{VaR}}^+ &= \sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}^+} \cdot \sqrt{\hat{V}_{\text{GMV}}^+} - \hat{R}_{\text{GMV}}^+, \\ \hat{R}_{\text{VaR}}^+ &= \hat{R}_{\text{GMV}}^+ + \frac{\hat{s}^+}{\sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}^+}} \cdot \sqrt{\hat{V}_{\text{GMV}}^+}, \\ \hat{V}_{\text{VaR}}^+ &= \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - \hat{s}^+} \cdot \hat{V}_{\text{GMV}}^+. \end{aligned}$$

Example 4. In this example we would like to demonstrate how to construct Markowitz portfolio in the singular case by hands and by Python. Now we consider an example of Markowitz portfolio optimization with an investor risk aversion coefficient $\tau = 4000$. This case illustrates a singularity scenario since the covariance matrix has a zero determinant. The Singular Value Decomposition (SVD) algorithm is demonstrated along with step-by-step calculations.

$$\mu_1 = 0.1, \quad \mu_2 = 0.08, \quad \tau = 4000$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

To compute the Moore–Penrose pseudoinverse of Σ , we proceed as follows:

$$\Sigma \Sigma^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 20 - \lambda & 10 \\ 10 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = (20 - \lambda)(5 - \lambda) - 100 = \lambda^2 - 25\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 25, \quad \lambda_2 = 0, \quad \sigma_1 = 5, \quad \sigma_2 = 0$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

For the eigenvectors of $\Sigma \Sigma^T$, we have:

$$(\Sigma \Sigma^T - 25I) \vec{u} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 10 & -20 \end{bmatrix} \vec{u}_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\Sigma \Sigma^T - 0I) \vec{u} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\hat{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \frac{1}{5} \Sigma^T u_1 = \frac{1}{5\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$V \Sigma^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{5\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{5\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^+ = V \Sigma^+ U^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{25} & \frac{1}{25} \\ \frac{4}{25} & \frac{2}{25} \end{bmatrix}$$

Next, we calculate the optimal portfolio using this pseudoinverse:

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.04 \\ 0.16 & 0.08 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.08 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^+ \mathbf{1}_k = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.24 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}_k^\top \Sigma^+ \mathbf{1}_k = 0.36$$

$$\frac{\Sigma^+ \mathbf{1}_k}{\mathbf{1}_k^\top \Sigma^+ \mathbf{1}_k} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^+ \mu = \begin{bmatrix} 0.012 \\ 0.024 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2\tau} = \frac{1}{8000}$$

$$\frac{1}{8000} \cdot \Sigma^+ \mu = \begin{bmatrix} 1.5 \times 10^{-6} \\ 3 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$w_{EU} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.5 \times 10^{-6} \\ 3 \times 10^{-6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3330015 \\ 0.666003 \end{bmatrix}$$

Now we replicate the same example using a Python program to verify the correctness of the manual computations. The result is a vector x

representing the optimal asset weights that simultaneously account for risk minimization, expected return, and the investor's risk aversion. For clarity, the program also prints auxiliary results such as the pseudoinverse matrix Σ^+ , individual components $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, and the final portfolio weights.

We use the same input:

$$\mu_1 = 0.1, \quad \mu_2 = 0.08, \quad \tau = 4000, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

The output of the Python implementation is:

$$\det(\Sigma) = 0.0$$

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.04 \\ 0.16 & 0.08 \end{bmatrix}$$

$$\text{Minimum variance component} = \begin{bmatrix} 0.33333333 \\ 0.66666667 \end{bmatrix},$$

$$\text{Risk-adjusted return component} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-7} \\ 2 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$\text{Optimal portfolio weights} = \begin{bmatrix} 0.33333343 \\ 0.66666687 \end{bmatrix}$$

These results confirm the accuracy of both the manual and programmatic approaches to portfolio optimization in the presence of a singular covariance matrix.

Illustration for the Real Financial Data

Markowitz Portfolio. The data for analysis was obtained from the Yahoo Finance API using the Python library `yfinance`. For each asset, historical daily closing prices were downloaded for the period from November 30, 2022 to November 30, 2023.

The portfolio consists of five assets:

- Amazon (AMZN) - Technology
- Mastercard (MA) - Finance
- Netflix (NFLX) - Entertainment
- Uber (UBER) - Transport
- Adobe (ADBE) - Software

Two values of the τ parameter were selected for the study:

- $\tau = 20$ — aggressive strategy focusing on maximizing return
- $\tau = 100$ — conservative strategy aiming at minimizing risk

Parameter	Value
Optimal weights	
AMZN	23.2%
MA	2.3%
NFLX	43.9%
UBER	10.0%
ADBE	20.6%
Portfolio volatility	0.01292
Return distribution	Not normal
VaR (95%)	
Parametric	0.336805
Historical	0.020637

Table 1. Portfolio characteristics for $\tau = 20$

Parameter	Value
Optimal weights	
AMZN	5.5%
MA	4.0%
NFLX	78.7%
UBER	5.7%
ADBE	6.1%
Portfolio volatility	0.01118
Return distribution	Not normal
VaR (95%)	
Parametric	0.291376
Historical	0.017616

Table 2. Portfolio characteristics for $\tau = 100$

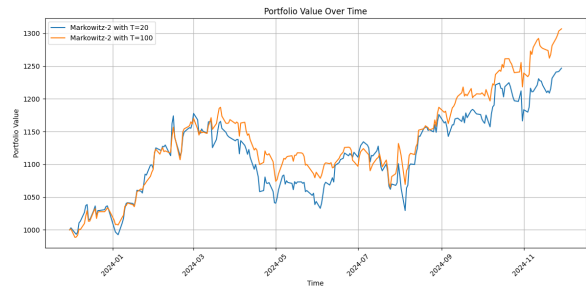


Figure 3. Portfolio wealth dynamics for Markowitz portfolio with $\tau = 20$ and $\tau = 100$

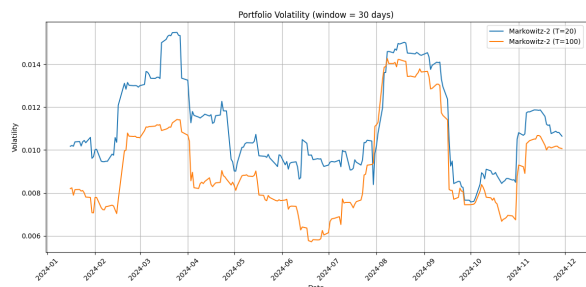


Figure 4. Parametric VaR dynamics for Markowitz portfolio with $\tau = 20$ and $\tau = 100$

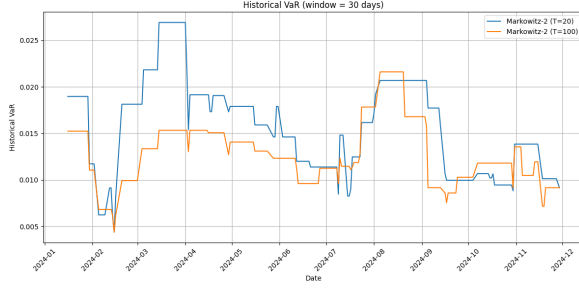


Figure 5. Historical VaR dynamics for Markowitz portfolio with $\tau = 20$ and $\tau = 100$

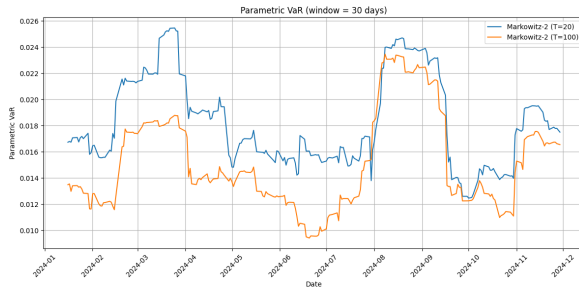


Figure 6. Portfolio wealth dynamics for Markowitz portfolio with $\tau = 20$ and $\tau = 100$

Our analysis highlights how varying the τ parameter impacts portfolio behavior. With $\tau = 20$, the portfolio remains diversified—43.9% in NFLX, 23.2% in AMZN, and 20.6% in ADBE. A shift to a conservative $\tau = 100$ results in a highly concentrated allocation (78.7% in NFLX) and reduces volatility by 13.5%.

This is confirmed by declines in both parametric VaR (from 0.337 to 0.291) and historical VaR (from 0.021 to 0.018), indicating lower risk. Given the non-normal return distribution, historical VaR proves more reliable.

Overall, the analysis shows how adjusting τ balances concentration and risk, linking theoretical models to real market dynamics. The findings underscore the importance of strategy calibration for achieving targeted risk-return profiles.

Minimum VaR portfolio. The data for this analysis was obtained using the same methodology as in the previous example, sourced from the Yahoo Finance API via the `yfinance` Python library. The portfolio comprises the same five assets: Amazon (AMZN), Mastercard (MA), Netflix (NFLX), Uber (UBER), and Adobe (ADBE), with historical daily closing prices covering the period from November 30, 2022, to November 30, 2023.

The optimal weights for the Minimum VaR Portfolio were calculated to minimize the Value-at-Risk (VaR). The resulting allocation is:

Parameter	Value
Optimal weights	
AMZN	25.59%
MA	0.14%
NFLX	42.56%
UBER	31.71%
ADBE	0.00%
Portfolio volatility	0.01379
Return distribution	Not normal
VaR (95%)	
Parametric	0.359239
Historical	0.019444

Table 3. Key characteristics of the VaR-min portfolio.

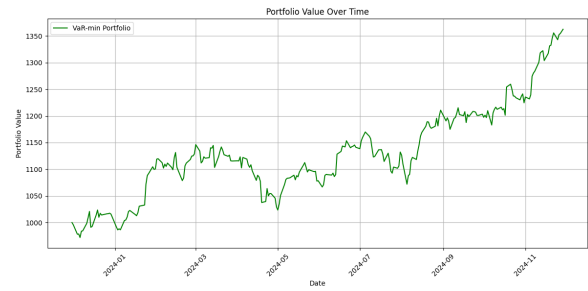


Figure 7. Portfolio wealth dynamics for the min-VaR portfolio.

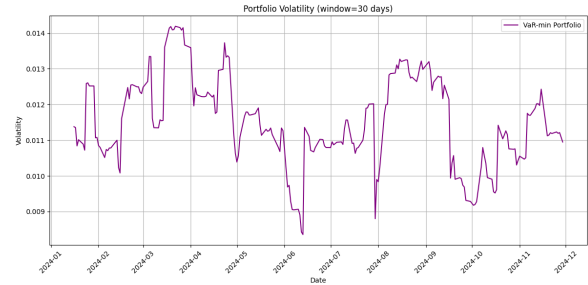


Figure 8. Portfolio volatility dynamics for the min-VaR portfolio.

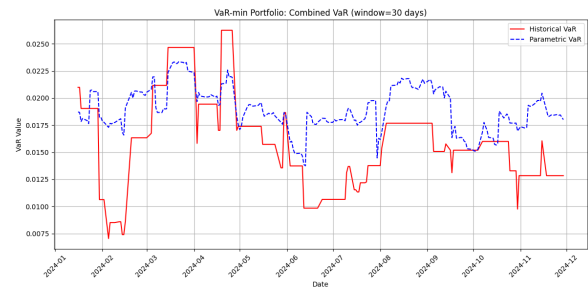


Figure 9. Historical and parametric VaR dynamics for the min-VaR portfolio.

The analysis demonstrates that the minimum

VaR portfolio is predominantly allocated to Netflix (NFLX) and Uber (UBER), with only marginal exposure to Mastercard (MA) and Adobe (ADBE). This allocation pattern reflects the optimization objective of minimizing Value-at-Risk (VaR), which naturally favors assets that have shown greater stability during adverse market conditions.

Compared to the conservative Markowitz portfolio ($\tau = 100$), the VaR-min portfolio exhibits slightly higher volatility. However, it achieves marginally lower historical VaR, highlighting its superior resilience during periods of market stress. Given the non-normal nature of return distributions, historical VaR emerges as a more reliable indicator of downside risk than the parametric measure.

Conclusion and discussion

In the paper two approaches to portfolio optimization were considered: the mean-variance and min-VaR technics. We apply these approaches to real financial data.

Firstly we estimate the parameters and take into account the case when the covariance estimated matrix is singular. We use the Moore-Penrose pseudoinverse and Singular Value Decomposition (SVD) to find solutions and demonstrate this in terms of some example.

After that we construct mean-variance and min-VaR optimal portfolios and compare the dynamics of portfolio wealth (means), volatility and Value-at-risk for it.

The analysis provided in Python demonstrates some interesting facts. For Markowitz portfolio we see how adjusting τ balances concentration and risk, linking theoretical models to real market dy-

namics. The findings underscore the importance of strategy calibration for achieving targeted risk-return profiles.

Minimum VaR allocation pattern reflects the optimization objective of minimizing Value-at-Risk (VaR), which naturally favors assets that have shown greater stability during adverse market conditions.

The time dynamics of portfolio mean and VaR confirm the effectiveness of min-VaR strategy in balancing risk and return. By prioritizing VaR minimization over traditional mean-variance objectives, the resulting portfolio provides a distinct and practical alternative framework for portfolio construction.

This min-VaR approach underscores the value of targeted optimization in modern portfolio theory: by explicitly focusing on risk protection, investors can achieve portfolios that are not only theoretically sound but also better aligned with real-world risk management objectives.

Theoretical researches (see for example [1]) show that the min-VaR optimization problem is equivalent to Markowitz's optimization problem if the returns on assets are multivariate normally distributed. As a result, all optimal portfolios obtained by solving [7] are lying on the EF, the set of optimal portfolios resulting from Markowitz's approach. The returns on real assets are not mostly multivariate normally distributed. It is a reason why the min-VaR and mean-variance portfolios demonstrate different behaviour for real data.

Thanks to the analysis to proposed approaches, the investor gets a tool that allows him to make decisions about choosing an approach to building an optimal portfolio, as well as taking into account the singularity of the covariance matrix.

References

1. G. J. Alexander and A. M. Baptista, *Journal of Economic Dynamics and Control*. **26**, 1159–1193 (2002).
2. G. J. Alexander and A. M. Baptista, *Management Science*. **50**, 1261–1273 (2004).
3. S. Benati, *European Journal of Operational Research*. **150**, 572–584 (2003).
4. T. Bodnar, S. Mazur and H. Nguyen, *Working Paper*. **15**. School of Business, Orebro University, Sweden (2022).
5. T. Bodnar, W. Schmid and T. Zabolotsky, *Statistics and Risk Modeling*. **29**, 281–314 (2012).
6. T. Bodnar and W. Schmid, *The European Journal of Finance*. **15**, 317–335 (2009).
7. C. Lim, H. D. Sherali and S. Uryasev, *Computational Optimization and Applications*. **46**, 391–415 (2010).
8. H. Markowitz, *The Journal of Finance*. **7**, 77–91 (1952).
9. D. Pappas, K. Kiriakopoulos and G. Kaimakamis, *International Mathematical Forum*. **5**, 2305–2318 (2010).
10. R. T. Rockafellar and S. Uryasev, *Journal of Banking and Finance*. **26**, 1443–1471 (2002).
11. N. Shchestyuk and S. Tyshchenko, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. **2022**, 651–665 (2022).
12. N. Shchestyuk and S. Tyshchenko, *Modern Stochastics: Theory and Applications*. **12**, 136–152 (2025).
13. G. Solomanchuk and N. Shchestyuk, *Mohyla Mathematical Journal*. **4**, 28–33 (2021).
14. N. Shchestyuk, S. Drin and S. Tyshchenko, *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance, Springer Proceedings*. **2024**, 286–291 (2024).

Бурдим А. А., Данилюк Є. А., Щестюк Н. Ю.

ПОРТФЕЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ ДЛЯ РЕАЛЬНИХ ДАНИХ: ПІДХОДИ ТА ВИКЛИКИ

Теорія портфельної оптимізації продовжує бути динамічною галуззю у фінансах, інтегруючи нові теорії та підходи для кращого задоволення потреб інвесторів. З розвитком фінансових ринків розвиватимуться й нові підходи для оптимізації портфелів, що робить цей напрям сприятливим для появи нових досліджень та інновацій.

Класичний підхід Марковіца базується на оптимізації функції, яка кількісно визначає компроміс між ризиком (дисперсією) та очікуваною доходністю. Проте цей підхід має деякі обмеження. Зокрема, він припускає, що інвестори раціональні, їхнє ставлення до ризику регулюється деяким параметром, ринки ефективні, а доходність активів розподілена нормально. У відповідь на обмеження теорії Марковіца з'явився інший підхід, що визнає певну асиметрію, тобто інвестори більше стурбовані потенційними збитками, ніж прибутками. Цей підхід базується на мінімізації так званого показника величини ризику Value-at-Risk. Незважаючи на досягнення класичної теорії Марковіца та підходу мінімізації VaR-показника, залишаються виклики, пов'язані з проблемами оцінки параметрів, можливістю появи сингулярної оціночної коваріаційної матриці та управлінням ризиками на волатильних ринках.

У цій статті ми розглядаємо побудову оптимальних портфелів як за підходом Марковіца, так і за мінімізацією показника величини ризику, а також враховуємо випадок, коли коваріаційна оціночна матриця є сингулярною. Ми використовуємо псевдообернений метод Мура—Пенроуза та розкладання за сингулярним значенням (SVD) для пошуку рішень. Ми застосовуємо ці підходи та методики до реальних фінансових даних, будуємо оптимальні портфелі за двома підходами, порівнюємо динаміку зміни доходності, варіативності і показника ризику для цих оптимальних портфелів між собою і з динамікою рівномірного портфеля.

Завдяки запропонованим підходам інвестор отримує інструмент, який дозволяє йому приймати рішення щодо вибору підходу при побудові оптимального портфеля, а також враховувати сингулярність коваріаційної матриці.

Ключові слова: оптимізація портфеля інвестора, середньодисперсійний аналіз, оптимальний портфель Марковіца, вартісна міра ризику (VaR), мінімум-VaR-аналіз, псевдообернений метод Мура—Пенроуза, оцінка параметрів.

Матеріал надійшов 24.08.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)

LAST TIME MOMENT OPTIMALITY IN UNIFORM 1-BULLET SILENT DUEL WITH SCALED EXPONENTIALLY-CONVEX ACCURACY

The uniform 1-bullet silent duel with scaled exponentially-convex accuracy of payoffs is a symmetric matrix game whose optimal value is 0, and each of the duelists has the same optimal behavior, whether it is in pure or mixed strategies. Such duels model two-side competitive interaction, where the purpose is to gain a reward by making the best possible decision through quantized time. It is proved that the last time moment is optimal in the duel with N time moments only when the accuracy factor does not exceed marginal value $\frac{e - e^{\frac{N-2}{N-1}}}{e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1}$. If the accuracy factor is dropped below this marginal value, then the last time moment is single optimal. If the accuracy factor is exactly equal to the marginal value, the duelist has two optimal time moments: the penultimate and last one. The conditions of the last time moment optimality can be set to force the duelist to act the latest possible, which is quite useful in some blockchain settings, where participants (e. g., validators or miners) choose when to attempt block proposal or transaction insertion under uncertainty.

Keywords: uniform 1-bullet silent duel, scaled accuracy, exponentially-convex accuracy, matrix game, last time moment optimality.

Uniform 1-bullet silent duels

The uniform 1-bullet silent duel is a timing game [1], [2]

$$\begin{aligned} \langle X_N, Y_N, \mathbf{U}_N \rangle = \\ = \left\langle \{x_i\}_{i=1}^N, \{y_j\}_{j=1}^N, \mathbf{U}_N \right\rangle \end{aligned} \quad (1)$$

of two players (duelists) whose pure strategy sets are denoted by

$$\begin{aligned} X_N = \{x_i\}_{i=1}^N &= \left\{ \frac{i-1}{N-1} \right\}_{i=1}^N = T_N = \\ &= \{t_q\}_{q=1}^N = \left\{ \frac{q-1}{N-1} \right\}_{q=1}^N \subset [0; 1], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} Y_N = \{y_j\}_{j=1}^N &= \left\{ \frac{j-1}{N-1} \right\}_{j=1}^N = T_N = \\ &= \{t_q\}_{q=1}^N = \left\{ \frac{q-1}{N-1} \right\}_{q=1}^N \subset [0; 1], \end{aligned} \quad (3)$$

and payoff matrix $\mathbf{U}_N$ is skew-symmetric [3], [4]:

$$\mathbf{U}_N = [u_{ij}]_{N \times N} = [-u_{ji}]_{N \times N} = -\mathbf{U}_N^T. \quad (4)$$

Uniform 1-bullet silent duels model two-side competitive interaction, where the purpose is to gain a reward by making the best possible decision through quantized time [2], [4]. This time is set

T_N in (2), (3), consisting of N successive time moments $\{t_q\}_{q=1}^N$ of possible shooting [1] and representing the standardized time span $[0; 1]$ upon its equidistant (uniform) quantization with a step of $\frac{1}{N-1}$. Thus, the duelist is allowed to legitimately shoot only at one of the time moments in set T_N , where number N determines the duel size. Shooting the bullet is a metaphor of making a single decision, where the duelist benefits from shooting as late as possible but only by shooting first [2], [3], [5].

Optimal time moment existence

Uniform 1-bullet silent duel (1) by (2) – (4), being a finite zero-sum game, always has a solution at least in mixed strategies [2], [3]. Besides, the duel is symmetric, and thus its optimal game value is 0, and each of the duelists has the same set of optimal strategies, which can be both pure and mixed [1], [6]. However, due to finite 1-bullet silent duels are commonly used to model non-repeatable interaction processes, the main goal is to determine all optimal time moments (optimal pure strategies) for the duelist to shoot [1], [7]. If there are no optimal time moments at the duelist, i. e. duel (1) is not solved in pure strategies (but, certainly, it is solved in mixed strategies), the duel configuration is forcedly modified through changing the structure of payoff matrix $\mathbf{U}_N$ in order to come up with

a pure-strategy optimal behavior for the duelist [1].

Owing to the skew-symmetry of matrix (4), whose main diagonal is of N zeros, any saddle point of matrix (4) is a zero entry in a nonnegative row and a nonpositive column [3]. Thus, if row i^* of matrix (4) by $i^* \in \{1, \overline{N}\}$ is nonnegative, then row i^* contains a saddle point on the main diagonal [4] and time moment t_{i^*} is optimal. A symmetric reasoning is true for columns: if column i^* of matrix (4) by $i^* \in \{1, \overline{N}\}$ is nonpositive, then column i^* contains a saddle point on the main diagonal [2] and time moment t_{i^*} is optimal. So, it is conventionally possible to conclude on optimal time moment existence by studying only either nonnegative rows or nonpositive columns of payoff matrix (4).

If row i^* contains a negative entry, time moment t_{i^*} is not optimal. At that, column i^* contains the positive entry. If row i^* contains only positive entries, except for the main diagonal entry $u_{i^*i^*} = 0$, then there is the single optimal time moment t_{i^*} in this duel [4], [8].

Scaled payoff exponential rate

Duel (1) by (2) – (4) is configured by the structure of payoff matrix (4), which is determined by how its entries are calculated. In general,

$$\begin{aligned} u_{ij} &= ag(x_i) - ag(y_j) + \\ &+ a^2 g(x_i) g(y_j) \operatorname{sign}(y_j - x_i) \\ &\text{for } i = \overline{1, \overline{N}} \text{ and } j = \overline{1, \overline{N}} \end{aligned} \quad (5)$$

by some discrete accuracy functions $g(x_i)$ and $g(y_j)$ of the first and second duelists, respectively, scaled with an accuracy factor $a > 0$, where

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(y_1) = g(0) = 0 \text{ and} \\ g(x_N) &= g(y_N) = g(1) = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Commonly, these functions are nondecreasing. As rewards increase with time, and the increment is rather nonlinear than linear, it is appropriate to consider exponentially-increasing accuracy functions. So, instead of (5), entry u_{ij} of payoff matrix (4) is calculated as

$$\begin{aligned} u_{ij} &= ag(e^{x_i}) - ag(e^{y_j}) + \\ &+ a^2 g(e^{x_i}) g(e^{y_j}) \operatorname{sign}(y_j - x_i) \\ &\text{for } i = \overline{1, \overline{N}} \text{ and } j = \overline{1, \overline{N}} \end{aligned} \quad (7)$$

by still obeying requirements similar to (6):

$$\begin{aligned} g(e^{x_1}) &= g(e^{y_1}) = g(e^0) = g(1) = 0 \text{ and} \\ g(e^{x_N}) &= g(e^{y_N}) = g(e^1) = g(e) = 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Seemingly, accuracy factor a just scales the reward, but its genuine impact will be ascertained below.

Assume that an exponentially-increasing accuracy function of the duelist is

$$g(e^z) = \alpha e^z + \beta \text{ by } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

As function (9) of variable z must obey requirements (8), then

$$\begin{aligned} g(e^0) &= g(1) = \alpha + \beta = 0, \\ g(e^1) &= g(e) = \alpha e + \beta = 1, \end{aligned}$$

whence

$$\begin{aligned} \beta &= -\alpha = 1 - \alpha e, \\ \alpha(e - 1) &= 1, \end{aligned}$$

and

$$\alpha = \frac{1}{e - 1}, \quad \beta = \frac{1}{1 - e}. \quad (10)$$

Upon plugging (10) into (9) function $g(e^z)$ becomes an exponentially-convex-accuracy function:

$$g(e^z) = \frac{e^z}{e - 1} - \frac{1}{e - 1} = \frac{e^z - 1}{e - 1}. \quad (11)$$

Then, upon plugging (11) into (7), entry u_{ij} of payoff matrix (4) is calculated as

$$\begin{aligned} u_{ij} &= a \cdot \frac{e^{x_i} - 1}{e - 1} - a \cdot \frac{e^{y_j} - 1}{e - 1} + \\ &+ a^2 \cdot \frac{e^{x_i} - 1}{e - 1} \cdot \frac{e^{y_j} - 1}{e - 1} \cdot \operatorname{sign}(y_j - x_i) = \\ &= a \cdot \frac{e^{x_i} - e^{y_j}}{e - 1} + \\ &+ a^2 \cdot \frac{(e^{x_i} - 1)(e^{y_j} - 1)}{(e - 1)^2} \cdot \operatorname{sign}(y_j - x_i) \\ &\text{for } i = \overline{1, \overline{N}} \text{ and } j = \overline{1, \overline{N}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Hence, the general goal is to determine optimal time moments for the duelist in uniform 1-bullet silent duel (1) by (2) – (4) and (12). In this paper, the particular goal is to determine whether and when the last time moment $t_N = 1$ is optimal in such a duel. The conditions of the last time moment optimality can be set to force the duelist to act the latest possible, which is quite useful in some blockchain settings, where participants (e.g., validators or miners) choose when to attempt block proposal or transaction insertion under uncertainty [9], [10]. It is quite noteworthy that

$$\begin{aligned} u_{1j} &= a \cdot \frac{1 - e^{y_j}}{e - 1} + a^2 \cdot \frac{(1 - 1)(e^{y_j} - 1)}{(e - 1)^2} = \\ &= a \cdot \frac{1 - e^{y_j}}{e - 1} < 0 \quad \forall j = \overline{2, \overline{N}} \end{aligned}$$

and thus the starting moment $t_1 = 0$ is never optimal in such a duel, regardless of the number of time moments and the scaled payoff exponential rate (determined by accuracy factor a).

The most trivial duel

Obviously, it is the best to get started with the most trivial duel, whose size is the smallest.

Theorem 1. *In the most trivial uniform 1-bullet silent duel (1) by (2)–(4) and exponentially-convex-accuracy payoffs (12), where $N = 3$ and*

$$\langle X_3, Y_3, \mathbf{U}_3 \rangle = \left\langle \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}, \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}, \mathbf{U}_3 \right\rangle, \quad (13)$$

the duelist has the single optimal time moment $t_2 = \frac{1}{2}$ by

$$a > \frac{e - \sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}, \quad (14)$$

Proof. For $N = 3$ the entries of the respective payoff matrix (4) are:

$$\begin{aligned} u_{12} &= a \cdot \frac{e^0 - e^{\frac{1}{2}}}{e - 1} + a^2 \cdot \frac{(e^0 - 1)(e^{\frac{1}{2}} - 1)}{(e - 1)^2} = \\ &= a \cdot \frac{1 - \sqrt{e}}{e - 1} = -u_{21} < 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$u_{13} = a \cdot \frac{e^0 - e^1}{e - 1} + a^2 \cdot \frac{(e^0 - 1)(e^1 - 1)}{(e - 1)^2} =$$

$$\mathbf{U}_3 = [u_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & a \cdot \frac{1 - \sqrt{e}}{e - 1} & -a \\ a \cdot \frac{1 - \sqrt{e}}{1 - e} & 0 & a \cdot \frac{\sqrt{e}(1 + a) - (e + a)}{e - 1} \\ a & a \cdot \frac{\sqrt{e}(1 + a) - (e + a)}{1 - e} & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

The second time moment is single optimal if the second row of matrix (20) is positive, except for $u_{22} = 0$. Having $u_{21} > 0$ by inequality (17), it is so when

$$u_{23} = a \cdot \frac{\sqrt{e}(1 + a) - (e + a)}{e - 1} > 0. \quad (21)$$

As $e > 1$, inequality (21) is equivalent to inequality

$$\sqrt{e}(1 + a) > e + a,$$

whence

$$\sqrt{e} - e > a - a\sqrt{e}$$

and inequality (14) emerges. The third time moment is single optimal if the third row of matrix (20) is positive, except for $u_{33} = 0$. Having $u_{31} =$

In such a duel, the duelist has the fewest possible number of time moments to shoot. The triviality, nevertheless, does influence the optimal behavior of duelists via accuracy factor a .

the duelist has the single optimal time moment $t_3 = 1$ by

$$a \in \left(0; \frac{e - \sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1} \right), \quad (15)$$

and the duelist has two optimal time moments $t_2 = \frac{1}{2}$ and $t_3 = 1$ by

$$a = \frac{e - \sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}. \quad (16)$$

$$= a \cdot \frac{1 - e}{e - 1} = -a = -u_{31} < 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} u_{23} &= a \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}} - e^1}{e - 1} + a^2 \cdot \frac{(e^{\frac{1}{2}} - 1)(e^1 - 1)}{(e - 1)^2} = \\ &= a \cdot \frac{\sqrt{e} - e}{e - 1} + a^2 \cdot \frac{\sqrt{e} - 1}{e - 1} = a \\ &= \frac{\sqrt{e}(1 + a) - (e + a)}{e - 1} = -u_{32}. \end{aligned} \quad (19)$$

Hence, with (17)–(19) matrix (4) here is

$= a > 0$, it is so when

$$u_{32} = a \cdot \frac{\sqrt{e}(1 + a) - (e + a)}{1 - e} > 0,$$

which is equivalent to inequality

$$\sqrt{e}(1 + a) < e + a,$$

whence condition (15) emerges. When $u_{23} = 0$, then

$$\sqrt{e}(1 + a) = e + a,$$

and condition (16) emerges, by which

$$u_{22} = u_{23} = u_{32} = u_{33} = 0$$

and thus time moments $t_2 = \frac{1}{2}$ and $t_3 = 1$ becomes optimal. $\square$

So, it is quite clear that accuracy factor a definitely influences the optimal strategy of the duelist, although the impact is not that big. Indeed, in the smallest duel, when the duelist is allowed to shoot at only three time moments, the optimal choice is between the duel span middle (second moment) and the duel end (third moment). Setting the accuracy factor to irrational value (16) is hardly possible in practice (inasmuch as, e.g., finite precision of numerical representation is only

possible in practical computations), so the two-moment optimality is unlikely.

Optimal time moments in bigger duels

In bigger duels, first consider optimality of the duel end time moment. It is as more convenient, as well as is going to lighten the proof of optimality of preceding time moments (including the penultimate one).

Theorem 2. *In uniform 1-bullet silent duel (1) by (2) – (4) and exponentially-convex-accuracy pay-offs (12), the duel end time moment $t_N = 1$ is single optimal if only*

$$a \in \left(0; \frac{e - e^{\frac{N-2}{N-1}}}{e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1}\right) \text{ by } N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}. \quad (22)$$

Proof. The duel end moment is single optimal if only the last row of matrix (4) is positive except for entry $u_{NN} = 0$:

$$\begin{aligned} u_{Nj} &= a \cdot \frac{e^{x_N} - e^{y_j}}{e - 1} - \\ &- a^2 \cdot \frac{(e^{x_N} - 1)(e^{y_j} - 1)}{(e - 1)^2} > 0 \\ \forall y_j < x_N = 1 \text{ by } j = 1, N - 1. \end{aligned} \quad (24)$$

At $n \in \{2, N\}$, function u_{nj} is decreasing with respect to index $j = 1, n - 1$: indeed, $e^{x_n} > 1$, $e^{y_j} \geq 1$, and thus value

$$\begin{aligned} u_{nj} &= a \cdot \frac{e^{x_n} - e^{y_j}}{e - 1} - \\ &- a^2 \cdot \frac{(e^{x_n} - 1)(e^{y_j} - 1)}{(e - 1)^2} = \\ &= a \cdot \frac{e^{x_n} - 1}{e - 1} - a^2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{e^{x_n} - 1}{e - 1}\right) \cdot \frac{e^{y_j} - 1}{e - 1} \end{aligned}$$

is a negatively-sloped line with respect to exponent e^{y_j} . Therefore, function u_{Nj} is decreasing with respect to index $j = 1, N - 1$, and inequality (24) is equivalent to inequality

$$\begin{aligned} u_{N,N-1} &= a \cdot \frac{e^{x_N} - e^{y_{N-1}}}{e - 1} - \\ &- a^2 \cdot \frac{(e^{x_N} - 1)(e^{y_{N-1}} - 1)}{(e - 1)^2} > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

At

$$a = \frac{e - e^{\frac{N-2}{N-1}}}{e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1} \text{ by } N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \quad (23)$$

the duelist has two optimal time moments: penultimate moment $t_{N-1} = \frac{N-2}{N-1}$ and end moment $t_N = 1$.

Inequality (25) is simplified to

$$\begin{aligned} u_{N,N-1} &= \frac{e - e^{y_{N-1}}}{e - 1} - a \cdot \frac{(e - 1)(e^{y_{N-1}} - 1)}{(e - 1)^2} = \\ &= \frac{e - e^{y_{N-1}}}{e - 1} - \frac{a \cdot (e^{y_{N-1}} - 1)}{e - 1} = \\ &= \frac{e - e^{y_{N-1}} \cdot (1 + a) + a}{e - 1} > 0 \end{aligned} \quad (26)$$

whence

$$\begin{aligned} e - e^{\frac{N-2}{N-1}} \cdot (1 + a) + a &> 0, \\ a \cdot \left(e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1\right) &< e - e^{\frac{N-2}{N-1}}, \\ a &< \frac{e - e^{\frac{N-2}{N-1}}}{e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Inequality (27) means that the end moment $t_N = 1$ is single optimal by (22).

If (23) is true, then it follows from (24) – (27) that

$$u_{N,N-1} = u_{NN} = u_{N-1,N} = u_{N-1,N-1} = 0, \quad (28)$$

and still the end moment $t_N = 1$ is optimal. The penultimate moment $t_{N-1} = \frac{N-2}{N-1}$ is optimal if $u_{N-1,N-2} \geq 0$ due to function $u_{N-1,j}$ is decreasing with respect to index $j = 1, N - 2$. So,

$$\begin{aligned} u_{N-1,N-2} &= a \cdot \frac{e^{x_{N-1}} - e^{y_{N-2}}}{e - 1} - a^2 \cdot \frac{(e^{x_{N-1}} - 1)(e^{y_{N-2}} - 1)}{(e - 1)^2} = \\ &= \frac{e - e^{\frac{N-2}{N-1}}}{e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1} \cdot \left(\frac{e^{\frac{N-2}{N-1}} - e^{\frac{N-3}{N-1}}}{e - 1} - \frac{e - e^{\frac{N-2}{N-1}}}{e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1} \cdot \frac{(e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1)(e^{\frac{N-3}{N-1}} - 1)}{(e - 1)^2}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e - e^{\frac{N-2}{N-1}}}{e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1} \cdot \frac{\left(e^{\frac{N-2}{N-1}} - e^{\frac{N-3}{N-1}}\right)(e-1) - \left(e - e^{\frac{N-2}{N-1}}\right)\left(e^{\frac{N-3}{N-1}} - 1\right)}{(e-1)^2} = \\
&= \frac{e - e^{\frac{N-2}{N-1}}}{e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1} \cdot \frac{e \cdot e^{\frac{N-2}{N-1}} - e \cdot e^{\frac{N-3}{N-1}} - e^{\frac{N-2}{N-1}} + e^{\frac{N-3}{N-1}} - e \cdot e^{\frac{N-3}{N-1}} + e^{\frac{N-2}{N-1}} \cdot e^{\frac{N-3}{N-1}} + e - e^{\frac{N-2}{N-1}}}{(e-1)^2} = \\
&= \frac{e - e^{\frac{N-2}{N-1}}}{e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1} \cdot \frac{e \cdot e^{\frac{N-2}{N-1}} - 2e^{\frac{N-2}{N-1}} + e^{\frac{N-3}{N-1}} + e^{\frac{N-2}{N-1}} \cdot e^{\frac{N-3}{N-1}} + e - 2e \cdot e^{\frac{N-3}{N-1}}}{(e-1)^2} = \\
&= \frac{e - e^{\frac{N-2}{N-1}}}{e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1} \cdot \frac{e \cdot e^{\frac{N-2}{N-1}} - 2e^{\frac{N-2}{N-1}} + e^{\frac{N-3}{N-1}} \cdot \left(1 + e^{\frac{N-2}{N-1}} + e^{\frac{2}{N-1}} - 2e\right)}{(e-1)^2} = \\
&= e^{\frac{N-3}{N-1}} \cdot \frac{e - e^{\frac{N-2}{N-1}}}{e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1} \cdot \frac{e \cdot e^{\frac{1}{N-1}} - 2e^{\frac{1}{N-1}} + 1 + e^{\frac{N-2}{N-1}} + e^{\frac{2}{N-1}} - 2e}{(e-1)^2}. \tag{29}
\end{aligned}$$

Clearly,

is

$$e - e^{\frac{N-2}{N-1}} > 0 \text{ and } e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1 > 0,$$

so the last term in (29) is nonnegative if

$$e \cdot e^{\frac{1}{N-1}} - 2e^{\frac{1}{N-1}} + 1 + e^{\frac{N-2}{N-1}} + e^{\frac{2}{N-1}} - 2e \geq 0. \tag{30}$$

The left side of inequality (30) can be written as

$$\begin{aligned}
&e \cdot e^{\frac{1}{N-1}} - 2e^{\frac{1}{N-1}} + 1 + \\
&+ e^{\frac{N-2}{N-1}} + e^{\frac{2}{N-1}} - 2e = \\
&= \varphi_1(N) + \varphi_2(N),
\end{aligned}$$

where

$$\varphi_1(N) = e \cdot e^{\frac{1}{N-1}} + e^{\frac{N-2}{N-1}} - 2e \tag{31}$$

and

$$\varphi_2(N) = 1 + e^{\frac{2}{N-1}} - 2e^{\frac{1}{N-1}}. \tag{32}$$

The first derivative of function (31) is

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_1}{dN} &= -\frac{e \cdot e^{\frac{1}{N-1}}}{(N-1)^2} + \\
&+ e^{\frac{N-2}{N-1}} \cdot \left(\frac{1}{N-1} - \frac{N-2}{(N-1)^2}\right) = \\
&= -\frac{e \cdot e^{\frac{1}{N-1}}}{(N-1)^2} + e^{\frac{N-2}{N-1}} \cdot \frac{1}{(N-1)^2} = \\
&= \frac{e^{\frac{N-2}{N-1}} - e^{\frac{1}{N-1}}}{(N-1)^2} = \\
&= \frac{e^{\frac{N-2}{N-1}}}{(N-1)^2} \cdot (1 - e^2) < 0 \quad \forall N > 2,
\end{aligned}$$

so (31) is a decreasing function. Its minimal value

$$\min_{N>2} \varphi_1(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_1(N) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(e \cdot e^{\frac{1}{N-1}} + e^{\frac{N-2}{N-1}} - 2e\right) = \\
&= e \cdot e^0 + e^1 - 2e = 0
\end{aligned}$$

and this minimum is not reached. So,

$$\varphi_1(N) > 0 \quad \forall N > 2. \tag{33}$$

The first derivative of function (32) is

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi_2}{dN} &= -\frac{2e^{\frac{2}{N-1}}}{(N-1)^2} + \frac{2e^{\frac{1}{N-1}}}{(N-1)^2} = \\
&= \frac{2e^{\frac{1}{N-1}}}{(N-1)^2} \cdot \left(1 - e^{\frac{1}{N-1}}\right) < 0 \quad \forall N > 2
\end{aligned}$$

as $e^{\frac{1}{N-1}} > 1$, so (32) is a decreasing function. Its minimal value is

$$\begin{aligned}
\min_{N>2} \varphi_2(N) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_2(N) = \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + e^{\frac{2}{N-1}} - 2e^{\frac{1}{N-1}}\right) = \\
&= 1 + e^0 - 2e^0 = 0
\end{aligned}$$

and this minimum is not reached. So,

$$\varphi_2(N) > 0 \quad \forall N > 2. \tag{34}$$

Therefore, due to (33) and (34), inequality (30) holds even strictly. This means that $u_{N-1, N-2} > 0$ and thus the last two rows of matrix (4) are positive except for entries (28), whence the penultimate moment $t_{N-1} = \frac{N-2}{N-1}$ is optimal by (23) along with the end moment $t_N = 1$, and there are no other optimal time moments at the duelist. $\square$

It is worth noting that Theorem 2 includes Theorem 1. A corollary from Theorem 2 is that if the accuracy factor scaling the reward exceeds marginal value (23), then shooting at the very end of the duel is not optimal.

Conclusion

The last time moment is optimal in uniform 1-bullet silent duel (1) by (2)–(4) and

exponentially-convex-accuracy payoffs (12) only when the accuracy factor does not exceed marginal value (23). If the accuracy factor is dropped below marginal value (23), then the last time moment is single optimal. If the accuracy factor is exactly equal to marginal value (23), the duelist has two optimal time moments: the penultimate and last one. In future work, it would be worth-while to determine whether preceding time moments are optimal in such duels.

References

1. T. Radzik, *Statistics, Probability and Game Theory*, Lecture Notes — Monograph Series. **30**, 269–292 (1996).
2. E. N. Barron, *Game theory : an introduction* (2nd ed.) (Wiley, Hoboken, New Jersey, USA, 2013).
3. V. V. Romanuke, *Theory of Antagonistic Games* (New World, Lviv, 2000, 2010).
4. R. A. Epstein, *The theory of gambling and statistical logic* (2nd ed.) (Academic Press, Burlington, Massachusetts, USA, 2013).
5. Y. Teraoka, *Mathematica Japonica*. **24**, 427–438 (1979).
6. J. P. Lang and G. Kimeldorf, *Management Science*. **22** (4), 470–476 (1975).
7. J. F. Reinganum, Chapter 14 – The Timing of Innovation: Research, Development, and Diffusion, in: R. Willig and R. Schmalensee (Eds.), *Handbook of Industrial Organization*, Volume 1 (Elsevier, North-Holland, 1989), pp. 849–908.
8. V. V. Romanuke, *Discrete Applied Mathematics*. **349**, 215–232 (2024).
9. C. Ewerhart, *Economics Letters*. **197**, Article no. 109614 (2020).
10. X. Wang and L.-Y. Wu, *Computers Industrial Engineering*. **200**, Article no.110821 (2025).

Романюк В. В.

ОПТИМАЛЬНІСТЬ ОСТАННЬОГО МОМЕНТУ ЧАСУ В РІВНОМІРНІЙ ОДНОКУЛЬОВІЙ БЕЗШУМНІЙ ДУЕЛІ З МАСШТАБОВАНОЮ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО-ОПУКЛОЮ ВЛУЧНІСТЮ

Рівномірна однокульова безшумна дуель з масштабованою експоненціально-опуклою влучністю вигравів є симетричною матричною грою, чие оптимальне значення дорівнює 0, а кожен з дуелянтів має однакову оптимальну поведінку, хай вона у чистих або у змішаних стратегіях. Такі дуелі моделюють двосторонню змагальницьку взаємодію, де метою є здобуття винагороди за якомога кращого рішення у квантованому часі. Доведено, що останній момент часу є оптимальним у дуелі з N моментами часу лише тоді, коли коефіцієнт влучності не перевищує граничного значення $\frac{e - e^{\frac{N-2}{N-1}}}{e^{\frac{N-2}{N-1}} - 1}$. Якщо коефіцієнт влучності падає нижче цього граничного значення, останній момент часу є єдиним оптимальним. Якщо коефіцієнт влучності точно рівний цьому граничному значенню, дуелянт має два оптимальні моменти часу: передостанній та останній. Умови оптимальності останнього моменту часу можуть накладатися для того, щоб змусити дуелянта діяти якомога пізніше, що є достатньо корисним у деяких налаштуваннях блокчейну, де учасники (наприклад, валідатори або майнери) обирають, коли спробувати пропонувати блок або вставку транзакції за умов невизначеності.

Ключові слова: рівномірна однокульова безшумна дуель, масштабована влучність, експоненціально-опукла влучність, матрична гра, оптимальність останнього моменту часу.

Матеріал надійшов 09.06.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)

PINN-BASED MACHINE LEARNING FOR MODELING INTERNAL WAVES IN SEMI-INFINITE FLUIDS

This study investigates the application of Physics-Informed Neural Networks (PINNs) for modeling wave processes at the interface between two incompressible fluids of differing densities. As a first step, the linear formulation of the problem is considered, which admits an analytical solution based on a spectral method involving Fourier decomposition of the initial perturbation. This solution serves as a benchmark for testing and validating the accuracy of the PINN predictions.

The implementation is carried out in Python using specialized libraries such as TensorFlow, NumPy, SciPy, and Matplotlib, which provide both efficient deep learning frameworks and tools for solving mathematical physics problems numerically. The approach integrates artificial intelligence with domain-specific knowledge in hydrodynamics, enabling the construction of interpretable and physically consistent models. Particular attention is given to the organization of the computational experiment, automation of visualizations, and storage of intermediate results for further analysis. The PINN model includes a loss function that encodes the governing equations and boundary conditions, and the training is conducted on randomly sampled points across the spatio-temporal domain. The influence of network architecture and training parameters on solution accuracy is examined. Visualization of loss function evolution and predicted wave profiles provides insight into convergence behavior and physical plausibility of the solutions.

A comparative analysis between the PINN-based and analytical solutions across different time instances is presented, revealing phase shifts and amplitude deviations. The model demonstrates good agreement at early times and a gradual accumulation of errors as time progresses—an expected feature of this class of methods. The results confirm the feasibility of applying the PINN framework to linear hydrodynamic problems, laying the groundwork for future extensions to weakly and strongly nonlinear regimes, including studies of wave stability and nonlinear wave dynamics.

Keywords: physically informed neural network (PINN), loss function, neural network testing, wave profiles.

Introduction

Physics-informed neural networks (PINNs) represent a modern class of machine learning models specifically designed to solve problems while respecting physical laws formulated as nonlinear differential equations. In a seminal work, Raissi et al. introduced the foundational PINN architecture capable of addressing both forward and inverse problems, enabling effective modeling in fields such as hydrodynamics, quantum mechanics, and wave dynamics [1]. Subsequently, Lin and Chen proposed a two-stage PINN training method that incorporates additional constraints on conserved physical quantities, significantly enhancing the accuracy and generalization capability of the model in reconstructing complex localized wave solutions, including soliton molecules and their interactions [2]. Bhatnagar et al. demonstrated that PINNs can be successfully applied to three-dimensional flow and thermal processes with limited data, serving as high-fidelity surrogate models for complex engineering applications [3].

In hydromechanics, the application of PINNs gains particular importance due to the high cost of experimental measurements and numerical simulations. Sharma et al. conducted a comprehensive review highlighting the potential of physics-informed machine learning methods to improve prediction accuracy and robustness for turbulent flows, as well as to replace resource-intensive numerical models [4]. Buhendwa et al. employed PINNs to reconstruct velocity and pressure fields in two-phase flow problems based on interface motion data, effectively addressing both forward and inverse hydrodynamic problems [5].

Wave process modeling remains one of the most actively developed fields of PINN applications. Pu et al. proposed an enhanced architecture with adaptive activation functions, which enabled high-precision recovery of localized solutions to the derivative nonlinear Schrödinger equation, including various soliton and solitary wave types [6]. Wang and Yan applied a multi-level PINN framework to discover parameters and recover rogue wave solutions of the defocusing non-

linear Schrödinger equation with time-dependent potential, opening new avenues for solving inverse problems with high sensitivity to initial conditions [7]. Pan et al. demonstrated that deep neural networks could effectively reconstruct internal wave amplitudes from optical satellite images by leveraging texture features and peak-to-peak distance analysis, achieving accuracy around 3.6% compared to in-situ measurements [8]. Liu et al. introduced the hybrid LWT-PINN model, combining classical linear wave theory with PINNs to provide phase-resolved wave prediction in real time, outperforming traditional linear models in both accuracy and forecast duration [9].

In seismic modeling, PINNs address challenges related to wave propagation in semi-infinite and geologically complex domains where proper boundary condition handling and computational scalability are critical. Ren et al. developed SeismicNet, a PINN model integrating soft boundary condition enforcement and sequential temporal training, enabling efficient seismic wave simulation under various geological parameter distributions [10]. To overcome spectral bias in modeling multifrequency seismic wavefields governed by the Helmholtz equation, Song and Wang proposed the Fourier Feature PINN—a model with embedded Fourier features that demonstrates high efficiency and accuracy when processing multiple frequencies simultaneously [11].

It is therefore worthwhile to investigate the applicability of PINNs for solving weakly nonlinear problems in hydromechanics and wave processes occurring in heterogeneous fluids, which is the focus of the present study.

Problem Statement and Preliminary Results

Physics-informed neural networks (PINNs) will be employed to solve the nonlinear problem of interfacial waves between two incompressible, ideal fluids with surface tension. The main objective is to utilize this classical hydromechanical problem to test the PINN methodology, assess its effectiveness, and demonstrate its applicability to solving complex physical problems. The goal is to determine the wave profile $\eta(x, t)$ and the velocity potential fields $\phi_1(x, z, t)$ in the lower fluid half-space Ω_1 and $\phi_2(x, z, t)$ in the upper half-space Ω_2 . A potential flow is considered, where ϕ_1 and ϕ_2 satisfy Laplace's equations in their respective domains.

The interfacial boundary is given by $z = \alpha\eta(x, t)$, where α is a parameter scaling nonlinear effects. On this boundary, kinematic conditions relate the surface motion to the fluid velocity, and a dynamic condition describes the pressure

balance accounting for gravity, kinetic energy, and surface tension T . All nonlinear terms, including those associated with surface tension, are scaled by α . At remote boundaries along the z -direction (as $z \rightarrow \pm\infty$), fluid velocities decay to zero. The initial wave profile is prescribed at $t = 0$ as $\eta(x, 0) = f(x)$.

The mathematical formulation of the problem (for $i = 1, 2$):

$$\phi_{i,xx} + \phi_{i,zz} = 0 \quad \text{in } \Omega_i, \quad (1)$$

with the kinematic boundary conditions on the interface $z = \alpha\eta(x, t)$

$$\eta_{,t} + \alpha\phi_{i,x}\eta_{,x} = \phi_{i,z}, \quad (2)$$

and the dynamic boundary condition on the interface $z = \alpha\eta(x, t)$

$$\begin{aligned} \phi_{1,t} - \rho\phi_{2,t} + (1 - \rho)g\eta + \frac{\alpha}{2}(\phi_{1,x}^2 + \phi_{1,z}^2) \\ - \frac{\alpha\rho}{2}(\phi_{2,x}^2 + \phi_{2,z}^2) - T \frac{\eta_{,xx}}{(1 + (\alpha\eta_{,x})^2)^{3/2}} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

with decay conditions at infinity

$$\phi_{i,x} \rightarrow 0, \quad \phi_{i,z} \rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow \mp\infty, \quad (4)$$

and the initial condition

$$\eta(x, 0) = f(x). \quad (5)$$

In the linear regime, an analytical solution exists and is detailed, for example, in [12]. Specifically, the interface deviation $\eta_{lin}(x, t)$ in the linear approximation ($\alpha \rightarrow 0$) can be represented as a sum of right- and left-propagating waves,

$$\eta_{lin}(x, t) = \eta_{lin}^+(x, t) + \eta_{lin}^-(x, t),$$

each expressed through Fourier integrals of the initial displacement $f(x)$:

$$\begin{aligned} \eta_{lin}^\pm(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a_f(k) \cos(kx \mp \omega(k)t) \right. \\ \left. - b_f(k) \sin(kx \mp \omega(k)t) \right) dk, \end{aligned} \quad (6)$$

where

$$a_f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos(k\xi) d\xi,$$

$$b_f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin(k\xi) d\xi,$$

and the dispersion relation is

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{k(1 - \rho + Tk^2)}{1 + \rho}}.$$

The following sections describe the implementation of PINN modeling, with the analytical solution (6) used as a reference to verify and validate the correctness of the PINN approach.

Implementation of PINN Modeling

Model Initialization and PINN Architecture. To solve the wave dynamics problem (1)–(5), a PINN was implemented using Python. The setup relies on standard libraries: `TensorFlow` (for constructing and training neural networks), `NumPy` (for numerical operations), `Matplotlib` (for visualization), and `os` (for file system interaction). Automatic differentiation is enabled through `TensorFlow`'s eager execution mode.

The architecture includes three fully connected neural networks, each responsible for approximating one of the key physical quantities: the interfacial displacement $\eta(x, t)$ and the velocity potentials $\phi_1(x, z, t)$ and $\phi_2(x, z, t)$ in the lower and upper fluid domains, respectively. The networks use `tanh` as activation functions and consist of multiple hidden layers with configurable depth and width.

The initial profile of the interface is modeled as a Gaussian wave packet characterized by its amplitude, width, and position. Physical parameters such as fluid density ratio, surface tension, and domain size are defined according to the linear regime considered in the first stage of the experiment.

Loss Function Implementation. The loss function, which drives the training of the PINN model, is constructed to reflect how well the neural network approximations satisfy the governing physical equations, initial condition, and boundary conditions. Contributions from different regions of the domain—including the fluid bulk, interface, boundaries at infinity, and initial time—are evaluated using randomly sampled collocation points generated via `tf.random.uniform`.

Each component of the loss corresponds to a different aspect of the problem: satisfaction of Laplace's equation in each fluid layer, enforcement of the kinematic and dynamic boundary conditions at the interface, decay behavior at spatial infinity, and adherence to the initial condition. Derivatives involved in these conditions are computed using `TensorFlow`'s `GradientTape` mechanism for automatic differentiation.

To ensure symmetry in the predicted solutions—expected due to the symmetric form of the initial condition—a dedicated term is added to penalize asymmetry with respect to the spatial variable. This improves both accuracy and the physical consistency of the resulting wave profiles.

All components are combined into a weighted sum, which forms the total loss minimized during training. Monitoring of individual loss terms is used to evaluate convergence and guide potential refinements to the network design or training strategy.

Training and Loading of Network Parameters. Training of the neural networks is carried out iteratively using the `Adam` optimizer with a fixed learning rate. At the start, the system checks for previously saved model weights; if such files are found, training is skipped and the weights are loaded. Otherwise, training begins from scratch.

The process uses a fixed number of training epochs and a predefined number of collocation points per step. Automatic differentiation is performed via `TensorFlow`'s `GradientTape`, which computes gradients of the total loss with respect to the model parameters. These gradients are then used to update the weights during optimization.

Training progress is monitored in real time through periodic plotting of the predicted wave profile $\eta(x, t)$ at selected time snapshots, along with printing loss values to the console. All key metrics, including the evolution of total and individual loss components, as well as the learning rate history, are stored for later analysis.

After training, the learned weights are saved to disk, enabling reuse without retraining. To improve convergence and training stability, standard learning rate scheduling strategies such as `ExponentialDecay` or `ReduceLROnPlateau` may be applied, allowing adaptive adjustment of the learning rate based on loss evolution.

Convergence Analysis and Visualization of PINN Modeling Results. The convergence behavior of the model is analyzed through visualization of loss histories and predicted wave fields. If available, stored data on loss values from the training process is used to generate plots showing the evolution of individual loss terms and the total loss, typically on a logarithmic scale. These plots help evaluate the relative contributions of physical constraints and the model's convergence behavior.

Upon completion of training or loading of pre-trained weights, predicted solutions are visualized and saved. This includes interface displacement profiles $\eta(x, t)$ at a series of fixed time points, which are plotted together and compared with the initial condition to assess accuracy and physical consistency.

A three-dimensional plot of $\eta(x, t)$ provides a global view of wave packet dynamics over space and time. Additionally, contour plots of the velocity potentials $\phi_1(x, z, t)$ and $\phi_2(x, z, t)$ at a given time are generated to examine flow structure in each fluid layer, with the interface between them clearly marked.

Below, several visualizations are presented to demonstrate the performance of the program, obtained using a PINN model with architecture `L7_N25`, consisting of 7 layers with 25 neurons each.

Figure 1 presents the dynamics of the loss function during the training process. The vertical axes of both plots are shown on a logarithmic scale, which enhances the visualization of changes in the loss values, particularly in the early stages of training. It can be observed that during the initial epochs, the total loss (Figure 1b) and its components (Figure 1a) decrease rapidly, followed by a phase of slower reduction accompanied by oscillations—a typical pattern for neural network optimization.

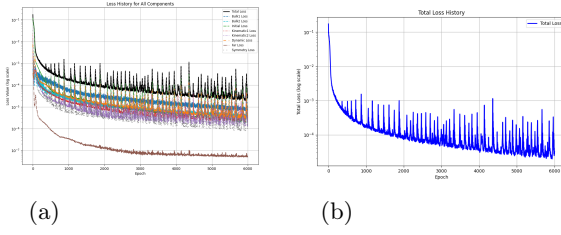


Figure 1. Loss function history during training: (a) individual components; (b) total loss.

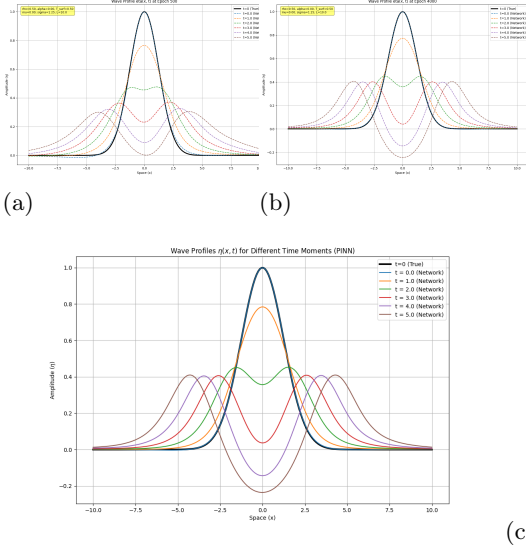


Figure 2. Wave profiles $\eta(x, t)$ at $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$: (a) after 2000 epochs; (b) after 4000 epochs; (c) final predictions after training.

Figures 2a and 2b illustrate the evolution of wave profiles $\eta(x, t)$ at intermediate training stages (epochs 2000 and 4000). Dashed lines represent the network predictions, while the bold black line shows the true initial condition. These plots demonstrate the gradual formation and propagation of the wave packet, converging toward physically consistent behavior. Figure 2c shows the results obtained after the final stage of training for the PINN architecture L7_N25. The plot illustrates the temporal evolution of the wave profile

$\eta(x, t)$ at several discrete time moments. The results demonstrate that the trained neural network is capable of capturing the propagation and dispersion of the internal wave packet, with visible agreement to the expected physical behavior across the time axis.

Figure 3 presents a three-dimensional visualization of the final trained solution for the wave profile $\eta(x, t)$ over the full spatiotemporal domain (x, t) . The 3D surface plot highlights the dynamic evolution of internal waves and clearly reveals the wave packet's trajectory, amplitude variations, and dispersive spreading as learned by the PINN model after complete training.

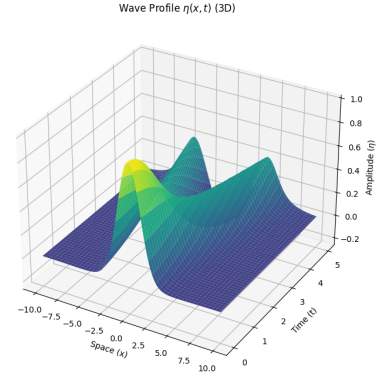


Figure 3. Three-dimensional visualization of the wave profile $\eta(x, t)$ over the entire space-time domain.

Finally, Figure 4 illustrates the distribution of velocity potentials $\phi_1(x, z, t)$ and $\phi_2(x, z, t)$ in the two fluid layers at a fixed time moment. The dashed line marks the interface between fluids, allowing assessment of the solution's continuity across the boundary.

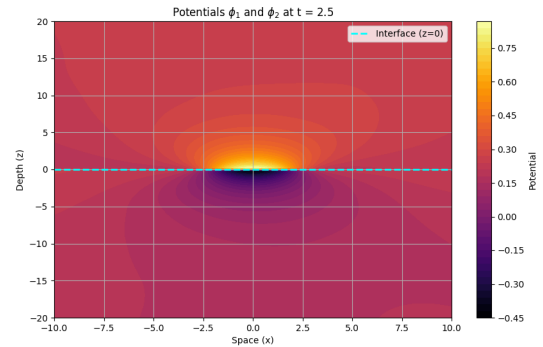


Figure 4. Velocity potentials ϕ_1 and ϕ_2 in the (x, z) plane at time $t = 2.5$. The dashed line indicates the fluid interface.

PINN Model Testing

Analytical Solution and Its Computational Implementation. The analytical solution described by equation (6) was computed using direct numerical integration, rather than relying on fast Fourier transform routines. To evaluate the Fourier coefficients explicitly, the `quad` function from the `scipy.integrate` module was employed. This method ensures high-accuracy evaluation of the integrals defining the spectral decomposition of the initial perturbation.

The calculation involves integrating sine and cosine transforms of the initial profile over a finite spatial domain. The integration range, resolution in wave number space, and the density of sampled points are chosen to capture the essential features of the wave spectrum and accurately reflect dispersive dynamics. Integration precision is controlled through parameters specifying the allowed subdivision of intervals, which is important for resolving localized features of the initial condition.

Analysis and Comparison of Wave Profiles. To compare the results of the PINN model with the analytical solution, a custom Python script was used. The script loads precomputed data and generates visualizations to assess modeling accuracy and evaluate different network configurations.

The analysis includes two types of plots. The first presents individual comparisons at selected time instances, highlighting the evolution of the wave profile as predicted by the PINN and by the analytical solution. The second provides a global view, combining all profiles on a single graph. Here, color is used to represent time, while different line styles distinguish between analytical and PINN-based results. This visualization strategy enables clear identification of phase shifts, amplitude discrepancies, error accumulation over time.

To illustrate the program's capabilities in comparison and visualization, sample plots are provided below.

Figure 5 shows a detailed comparison of wave profiles $\eta(x, t)$ for the analytical solution (solid black line) and the PINN model with architecture L10_N50 with 10 layers, each containing 50 neurons, (dashed blue line) at six different time points ($t = 0.0$ to $t = 5.0$). Each subplot corresponds to a specific moment in time, allowing visual inspection of discrepancies or agreement between solutions during wave packet evolution. At early times ($t = 0.0$, $t = 1.0$), the predictions closely match the analytical solution. However, as time progresses, small deviations emerge, visible in phase shifts and amplitude differences, especially in the wave packet tails.

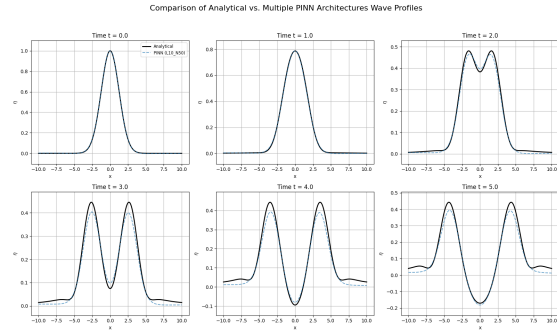


Figure 5. Comparison between analytical solution and PINN predictions (L10_N50) for wave profiles $\eta(x, t)$ at different time points.

Figure 6 presents a combined plot where all wave profiles for both the analytical solution (solid lines) and the PINN model (dashed lines) are displayed together. Line colors encode time, enabling tracking of temporal evolution. Good initial agreement is observed, which gradually deteriorates over time, indicating an accumulation of errors in the PINN model compared to the analytical solution. Differences in phase velocity and dispersion become more pronounced at later stages.

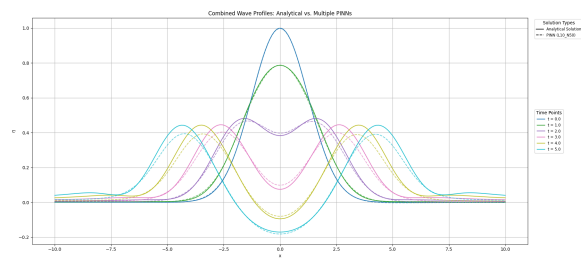


Figure 6. Wave profile evolution at different time points: the analytical solution and PINN (L10_N50) with 10 layers, each containing 50 neurons.

The obtained testing results demonstrate that the PINN model accurately reproduces the wave dynamics at early stages; however, error accumulation becomes noticeable over time, highlighting the need for further tuning of the architecture and training parameters.

Conclusion and Future Research Directions

The results of the first stage of experiments on modeling the linear interfacial wave problem between two fluid layers using PINNs demonstrate satisfactory agreement between the obtained numerical solutions and the analytical results. This confirms the fundamental applicability and effectiveness of the PINN method for problems of this class.

However, in order to improve the model's accuracy and robustness, further training is necessary, along with an investigation of the impact of various learning rate optimization strategies (e.g., `ExponentialDecay` or `ReduceLROnPlateau`) and modifications of the neural network architecture.

The next key stage of this research involves transitioning to the modeling of the nonlinear version of the problem. This will require adapting the PINN model to incorporate the full nonlinear terms in the governing equations and boundary

conditions, which poses a more complex and physically rich challenge. Investigating nonlinear wave dynamics will allow for a deeper exploration of phenomena such as soliton formation and wave packet instabilities, as well as an evaluation of the potential of PINNs in solving problems that lack simple analytical solutions.

Acknowledgments. Author expresses gratitude to the Research Council of Lithuania for the support in preparing this article.

References

1. M. Raissi, P. Perdikaris and G. E. Karniadakis, *Journal of Computational Physics*. **378**, 686–707 (2019).
2. S. Lin and Y. Chen, *Journal of Communicational Physics*. **457**, 111053 (2022).
3. S. Bhatnagar, A. Comerford and F. Banaeizadeh, *Journal of Machine Learning for Modeling and Computing*. **5** (1), 39–67 (2024).
4. P. Sharma, W. T. Chung, B. Akoush and M. A. Ihme, *Energies*. **16**, 2343 (2023).
5. A. B. Buhendwa, S. Adami and N. A. Adams, *Machine Learning with Applications*. **4**, 100029 (2021).
6. J. Pu, J. Li and Y. Chen, *Nonlinear Dynamics*. **105**, 1723–1739 (2021).
7. L. Wang and Z. Yan, *Physics Letters A*. **404**, 127408 (2021).
8. X. Pan, J. Wang, X. Zhang, Y. Mei, L. Shi and G. A. Zhong, *International Journal of Remote Sensing*. **39** (3), 607–618 (2018).
9. Y. Liu, X. Zhang, Q. Dong, G. Chen and X. Li, *Applied Energy*. **335**, 121602 (2024).
10. P. Ren, C. Rao, S. Chen, J.-X. Wang, H. Sun and Y. Liu, *Computer Physics Communications*. **295**, 109010 (2024).
11. C. Song and Y. Wang, *Geophysical Journal International*. **232**, 1503–1514 (2022).
12. O. Avramenko, *Mohyla Mathematical Journal*. **7**, 51–56 (2024).

Авраменко О. В., Компан С. В., Сарана М. П.

МАШИННЕ НАВЧАННЯ НА ОСНОВІ PINN ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ВНУТРІШНІХ ХВИЛЬ У НАПІВНЕСКІНЧЕННИХ РІДИНАХ

У роботі розглядається застосування фізично інформованих нейронних мереж (Physics-Informed Neural Networks, PINNs) для моделювання хвильових процесів на межі поділу двох нестисливих рідин з різною густиною. На першому етапі дослідження вивчається лінійна постановка задачі, яка допускає аналітичний розв'язок на основі спектрального методу з розкладом початкового збурення у ряд Фур'є. Це розв'язання використовується для тестування та валідації точності передбачень моделі PINN.

Програмну реалізацію виконано мовою Python із використанням спеціалізованих бібліотек TensorFlow, NumPy, SciPy та Matplotlib, що забезпечують як ефективне створення архітектур глибокого навчання, так і чисельне розв'язання задач математичної фізики. Запропонований підхід поєднує можливості штучного інтелекту з галузевими знаннями в галузі гідродинаміки, що дає змогу будувати інтерпретовані та фізично обґрунтовані моделі. Особливу увагу приділено організації експерименту, автоматизації візуалізації та збереженню проміжних результатів для подальшого аналізу. Реалізація PINN включає формулювання функції втрат, яка відображає фізичні рівняння та граничні умови, а навчання нейромережі здійснюється на випадковій вибірці точок у просторово-часовій області. Проаналізовано вплив архітектури моделі та параметрів навчання на точність розв'язання. Візуалізація історії втрат і передбачених профілів хвиль дозволяє оцінити збіжність та фізичну адекватність отриманого розв'язання.

Наведено порівняння результатів моделювання PINN з аналітичним розв'язком у різні моменти часу, виявлено особливості фазових і амплітудних відхилень. Зафіксовано високу відповідність розв'язків на початкових етапах і поступове накопичення похибок у часі, що є типовим для подібних моделей. Отримані результати підтверджують придатність підходу PINN для задач лінійної

гідродинаміки, закладаючи підґрунтя для подальшого поширення на слабо- та сильнонелінійні режими, дослідження стійкості та динаміки нелінійних хвиль.

Ключові слова: фізично інформована нейронна мережа (PINN), функція втрат, тестування нейромережі, профілі хвиль.

Матеріал надійшов 19.08.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)

ANALYSIS OF WAVE PROPAGATION CONDITIONS IN A TWO-LAYER HYDRODYNAMIC SYSTEM WITH A FREE SURFACE

The study examines the problem of the propagation of internal and surface waves in a two-layer hydrodynamic system "a half-space - a layer - a layer with a free surface". A mathematical model in a linear approximation is presented. The research problem is formulated under the assumption that the fluids are ideal and incompressible. The mathematical formulation of the problem is given in a dimensionless form. Expressions for the deviation of the contact interface $\eta_1(x, t)$ and the free surface $\eta_2(x, t)$ in the form of traveling waves are found. Expressions for the potentials $\phi_1(x, z, t)$ and $\phi_2(x, z, t)$, whose gradients describe the propagation velocities in the layers Ω_1 and Ω_2 respectively, are obtained in an analytical form. A dispersion relation that connects the wave number and the wave propagation frequency is derived. The roots of the dispersion relation, which are the frequencies of wave propagation on the contact interface and on the free surface, are found. An analysis of the roots of the dispersion relation depending on the geometric and physical parameters of the system is carried out. In particular, the dependence of the wave propagation frequencies on the wave number without considering surface tension is analyzed.

The conducted research indicates that in the absence of surface tension ($T_1 = T_2 = 0$), the density ratio ρ acts as a defining parameter that governs both the quantitative and qualitative characteristics of the wave modes in the considered system. A transition from the classical state of the system with clearly separated fast surface and slow internal modes to a regime of their inversion was identified, which is a significant result for a deeper understanding of the dynamics of strongly stratified fluids.

The consideration of surface tension forces reveals a complex interaction between the effects of density stratification and capillarity. Capillary forces lead to a substantial increase in wave frequencies and can become a dominant factor for internal modes, effectively neutralizing the influence of density changes. At the same time, it has been established that the density ratio ρ retains its role as the key parameter that determines the qualitative structure of the modes, including the possibility of their complete inversion under conditions of strong fluid stratification.

Keywords: wave propagation, two-layer system, dispersion relation.

Introduction

The investigation of wave propagation conditions in stratified hydrodynamic systems is based on the analysis of the dispersion relation. Such studies are an important component of modern research into wave motions in fluids.

In article [1] investigates the problem of wave propagation in a hydrodynamic system consisting of a layer with a rigid bottom and a layer with a free surface. The roots of the dispersion equation are analyzed for various values of the density ratio. In the limiting cases, the correspondence of the obtained roots to previously known results is shown. The existence of two linearly independent solutions for the first-order approximation problem is demonstrated, and the shapes of the free surface and the interface are also investigated.

In [2] models nonlinear internal waves in an ocean of great depth. The ocean is assumed to

be composed of three homogeneous fluid layers of different densities in a stable stratified configuration. Based on the Ablowitz-Fokas-Musslimani formulation for irrotational flows, strongly nonlinear and weakly nonlinear models are developed for the "shallow-shallow-deep" and "deep-shallow-deep" scenarios. Internal solitary waves are computed using numerical iteration schemes, and their global bifurcation diagrams are obtained by a numerical continuation method and compared for different models. For the "shallow-shallow-deep" case, both mode-1 and mode-2 internal solitary waves can be found, and on the mode-2 branch, a pulse broadening phenomenon resulting in conjugate flows is observed. While in the "deep-shallow-deep" situation, only mode-2 solitary waves can be obtained. The existence and stability of mode-2 internal solitary waves are confirmed by solving the primitive equations based on the MITgcm model.

In [3] investigates the weakly nonlinear prob-

lem of internal wave packet propagation in a “half-space – layer – layer with a rigid lid” system. Based on this problem, three linear problems are constructed for the scale components of the velocity potentials and the displacements of the interfaces. The conditions for wave propagation in the first approximation are established for different density ratios in the hydrodynamic system, and the dependences of possible frequencies on the top layer thickness and the wave number are analyzed. The influence of the presence of surface tension at the interfaces is investigated.

Effects of surface tension reduction on wind-wave growth are investigated using direct numerical simulations of air-water two-phase turbulent flows [4]. The incompressible Navier-Stokes equations for the air and water sides are solved using an arbitrary Lagrangian-Eulerian method with boundary-fitted moving grids. The growth of finite-amplitude, non-breaking gravity-capillary waves, with a wavelength of less than 0.07 m, is simulated for two cases of different surface tensions under a low wind speed condition of several meters per second. The results show that the significant wave height for the smaller surface tension case increases faster than for the larger surface tension case. Analysis of energy fluxes for gravitational and capillary wave scales shows that when the surface tension is reduced, the energy transfer from the significant gravity waves to the capillary waves decreases, and the significant waves accumulate more energy supplied by the wind. This results in faster wave growth for the smaller surface tension case. To support this conjecture, the effect of surface tension is compared with laboratory experiments in a small wind-wave tank.

In [5] the evolution of a wave-like front perturbed by space-correlated disorder was studied. In addition, the generic solution for the field mean-value was presented as a series expansion in Terwiel’s cumulant operators. This infinite series truncates due to the algebra of ‘naked’ Terwiel’s cumulants when these cumulants are associated with a space exponential-correlated symmetric binary disorder. An equivalent approach is applied to study the dispersion relation for one-dimensional surface gravity waves propagating over an irregular bottom. The theory is based on the study of the mean value of plane-wave-like Fourier modes for the propagation and damping of surface waves on a random bottom.

In article [6] investigated the problem of wave propagation in a three-layer hydrodynamic system described as ‘a layer with a rigid bottom–a layer–a layer with a rigid lid’. For the first approximation, the dispersion relation and its two pairs of roots are obtained. Expressions for the amplitude ratios of

the interface displacements, corresponding to the roots of the dispersion equation, are derived. The dependences of these amplitude ratios on various physical parameters are graphically illustrated and analyzed.

Problem statement

The problem of the propagation of two-dimensional waves at the interface (internal waves) and on the free surface (surface waves) is investigated within a hydrodynamic system described as “half-space - layer with a free surface”.

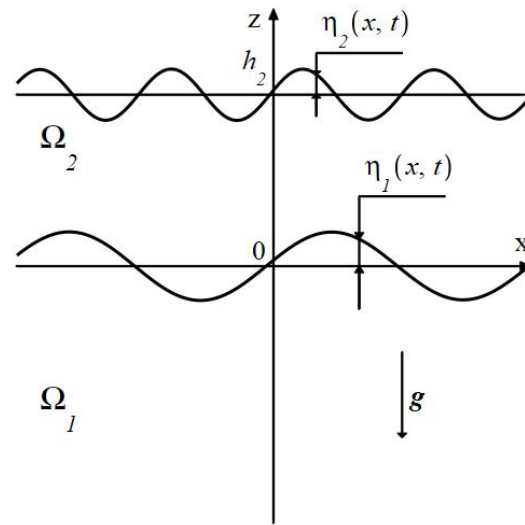


Figure 1. Problem statement.

The lower layer, $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -\infty < z < 0\}$, has a density of ρ_1 , and the upper layer, $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 < z < h_2\}$, has a density of ρ_2 . The layers are separated by the interface $z = \eta_1(x, t)$, and the upper layer is bounded from above by the free surface $z = \eta_2(x, t)$. The forces of surface tension at the interface, T_1 , and on the free surface, T_2 , are taken into account. The force of gravity is directed perpendicular to the interface in the negative z -direction, and the fluids are considered to be incompressible (Fig.1).

Wave propagation velocities in the respective domains are expressed in terms of the gradients of the potentials ϕ_1 in Ω_1 and ϕ_2 in Ω_2 . The mathematical formulation of the problem under study in the linear approximation using dimensionless variables is presented below.

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = 0 \text{ in } \Omega_i,$$

kinematic conditions

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi_i}{\partial z} = 0 \text{ at } z = 0,$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0 \text{ at } z = h_2,$$

dynamic conditions

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + (1 - \rho)\eta_1 = T_1 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} \text{ at } z = 0,$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \eta_2 = T_2 \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} \text{ at } z = h_2,$$

boundary condition at infinity

$$|\nabla \phi_1| \rightarrow 0 \text{ at } z \rightarrow -\infty,$$

where $\rho = \rho_1/\rho_2$ is the density ratio.

In the following section, the solutions of the linear approximation will be presented, and the derived dispersion relation will be provided.

Solutions and the dispersion relation

For the mathematical formulation presented above, solutions have been obtained in the form of traveling waves. The displacements of the interface and the free surface are found in the following form:

$$\eta_1 = A \exp(i\theta + kz) + c.c.,$$

$$\eta_2 = (\omega^2 \rho)^{-1} [(T_1 k^3 - k\rho + k - \omega^2) \sinh(kh_2) - \omega^2 \rho \cosh(kh_2)] A \exp(i\theta + kz) + c.c.,$$

where A is the wave amplitude, k is the wave number, ω is the wave frequency, $\theta = kx - \omega t$, and *c.c.* denotes the complex conjugate of the preceding term.

The expressions for the potentials are as follows:

$$\phi_1 = -\frac{i\omega}{k} A \exp(i\theta + kz) + c.c.,$$

$$\phi_2 = \frac{i}{k\omega\rho} [(T_1 k^3 - k\rho + k - \omega^2) \cosh(kz) - \omega^2 \rho \sinh(kz)] A \exp(i\theta) + c.c.$$

Based on the solutions of the linear approximation, a dispersion relation that relates the wave frequency and the wave number has been derived. The dispersion relation is obtained in the following form:

$$\omega^2 = (k + T_2 k^3) \frac{c_1 - c_2 \coth(kh_2)}{c_2 - c_1 \coth(kh_2)},$$

where $c_1 = T_1 k^3 - k\rho + k - \omega^2$, $c_2 = \omega^2 \rho$.

The dispersion relation can be expressed in the form of a biquadratic equation for the wave frequency ω as follows:

$$a\omega^4 + b\omega^2 + c = 0,$$

where

$$a = \rho + \coth(kh_2),$$

$$b = (1 + \rho \coth(kh_2))(T_2 k^3 + k) - \coth(kh_2)(T_1 k^3 - k\rho + k),$$

$$c = -(T_2 k^3 + k)(T_1 k^3 - k\rho + k).$$

The equation has two pairs of roots:

$$\omega_{1,3} = \mp \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$\omega_{2,4} = \mp \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

which represent the frequencies of waves that can propagate in the system under study. In the following section, an analysis of these roots will be performed as a function of the geometric and physical parameters of the system.

Analysis of the roots of the dispersion relation

An analysis of the dispersion relations for two-dimensional waves in the hydrodynamic system 'a heavy fluid half-space – a layer of a lighter fluid with a free surface' is presented. The influence of the density ratio $\rho = \rho_2/\rho_1$ on the frequency characteristics of the waves $\omega(k)$ was studied in the absence of surface tension forces ($T_1 = T_2 = 0$) and for a fixed dimensionless thickness of the upper layer $h_2 = 1$. The dispersion relation for this system has two branches of real solutions $\omega(k)$, corresponding to two wave modes: $\omega_1(k)$ - blue color and $\omega_2(k)$ - red color.

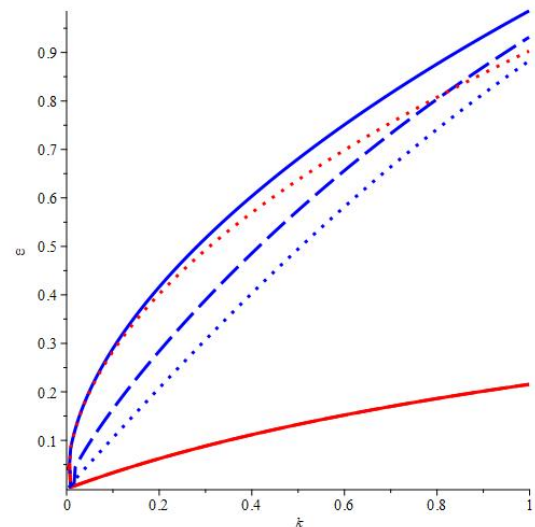


Figure 2. Dispersion curves without surface tension: $\rho = 0.9$ - solid lines, $\rho = 0.5$ - dash lines, $\rho = 0.1$ - dot lines.

In the case where the fluid densities are close ($\rho = 0.9$), the system exhibits classical behavior (Fig.2). There are two clearly distinct modes: a high-frequency mode, which corresponds to surface (barotropic) waves, and a low-frequency mode, which corresponds to internal (baroclinic) waves at the contact interface. The restoring force for the internal waves is the reduced gravity, proportional to the density difference $(1 - \rho)$, which explains their significantly lower frequencies compared to the surface waves.

With a decrease of the parameter ρ to 0.5, corresponding to an increase in the density contrast, the frequency of the surface mode undergoes only minor changes, confirming its weak sensitivity to internal stratification. In contrast, the behavior of the internal mode shows a non-trivial result. Its values remain at practically the same level as in the previous case. This indicates the presence of complex inertial effects in the system's dynamics, which compensate for the increase in the restoring force for the given parameters.

A further decrease of the density ratio to $\rho = 0.1$ leads to a qualitative restructuring of the wave dynamics. The effect of mode swapping is observed: the branch that previously corresponded to the slow internal mode now becomes high-frequency, and vice versa. In this regime, when the upper layer becomes extremely light, the contact interface between the fluids begins to behave like a free surface for the heavy lower half-space, which causes the high frequencies of the corresponding mode. At the same time, the waves on the free surface of the light layer itself become dynamically slower.

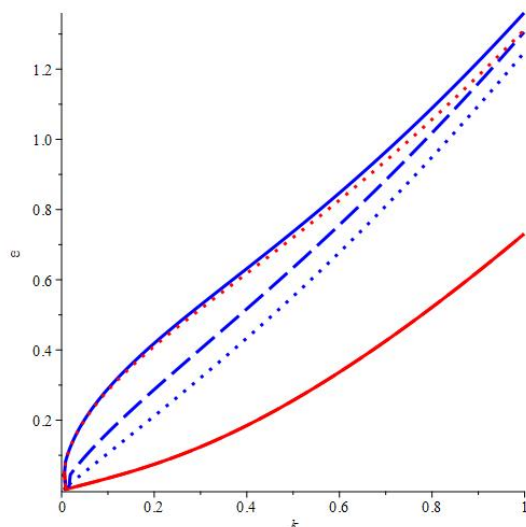


Figure 3. Dispersion curves with surface tension: $\rho = 0.9$ - solid lines, $\rho = 0.5$ - dash lines, $\rho = 0.1$ - dot lines.

In the case of close densities ($\rho = 0.9$), the presence of surface tension leads to a significant increase in the frequencies of both modes compared to the purely gravitational case. This transforms the waves into gravity-capillary waves, where capillary forces, proportional to k^3 , become a substantial restoring force, especially for short waves. This effect is most pronounced for the internal mode ω_2 , whose frequency increases severalfold, which indicates the significant influence of the tension at the interface (Fig.3).

When the parameter ρ is decreased to 0.5, corresponding to an increase in the density contrast, the dispersion curves are nearly identical to the previous case. Despite a five-fold increase in the gravitational restoring force for the internal mode, its frequency ω_2 remains practically unchanged. This indicates that for the given parameters, the capillary force at the interface becomes the dominant factor in shaping the dynamics of the internal waves. The contribution from the gravitational component, related to the density difference, becomes secondary; therefore, the change in ρ has almost no effect on the final frequency.

A further decrease of the density ratio to $\rho = 0.1$ leads to a qualitative restructuring of the wave dynamics, analogous to that observed in the case without surface tension. Mode inversion occurs, and the ω_2 branch becomes high-frequency, exceeding the ω_1 branch. This fundamental phenomenon, caused by strong stratification, persists even in the presence of capillary effects. Surface tension in this regime acts as an additional amplifying factor, further increasing the frequencies of both already-restructured modes. Thus, the waves at the interface (ω_2) become the fastest in the system, as their dynamics are determined by the combined action of the full force of gravity and significant surface tension.

Conclusions

The analysis shows that, in the absence of surface tension on both surfaces, the density ratio ρ is a key parameter that controls not only the quantitative but also the qualitative characteristics of the wave modes in the system. A transition from the classical configuration with clearly defined fast surface and slow internal modes to a regime in which their inversion occurs is demonstrated, which is an important result for understanding the dynamics of strongly stratified fluids.

In the presence of surface tension forces, the analysis reveals a complex interaction between density stratification and capillary effects. Surface tension significantly increases the wave frequencies and can become the dominant factor for internal

modes, nullifying the effect of density changes. At the same time, the density ratio ρ remains the key parameter that determines the qualitative struc-

ture of the modes, up to their complete inversion under strong fluid stratification.

References

1. O. V. Avramenko, V. V. Naradovyi and I. T. Selezov, J Math Sci. **212**, 131–141 (2016).
2. Z. Wang, Z. Wang and C. Yuan, Acta Mech. Sin. **38**, 321473 (2022).
3. O. V. Avramenko, V. V. Naradovyi and M. V. Lunyova, J Math Sci. **247**, 173–190 (2020).
4. K. Matsuda, S. Komori, N. Takagaki and R. Onishi, Journal of Fluid Mechanics. **960**, A22 (2023).
5. M. O. Cáceres, Waves in Random and Complex Media. **34** (2), 734–747 (2021). <https://doi.org/10.1080/17455030.2021.1918795>.
6. V. V. Naradovyi and D. S. Kharchenko, Matematychnye modeliuvannia. **1** (46), 32–43 (2022).

Нарадовий В. В., Гур'єв В. О., Демідов В. В.

АНАЛІЗ УМОВ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ДВОШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

У дослідженні розглянуто задачу про поширення внутрішніх та поверхневих хвиль в двошаровій гідродинамічній системі «півпростір - шар - шар з вільною поверхнею». Представлено математичну модель в лінійному наближенні. Проблема дослідження сформульована в припущенні, що рідини є ідеальними та нестисливими. Математична постановка задачі наведена в безрозмірному вигляді. Знайдено вирази для відхилення поверхні контакту $\eta_1(x, t)$ та вільної поверхні $\eta_2(x, t)$ у вигляді біжучих хвиль. Отримано в аналітичному вигляді вирази для потенціалів $\phi_1(x, z, t)$ та $\phi_2(x, z, t)$, градієнти яких описують швидкості поширення в шарах Ω_1 та Ω_2 відповідно. Виведено дисперсійне співвідношення, яке пов'язує між собою хвильове число та частоту поширення хвилі. Знайдено корені дисперсійного співвідношення, які є частотами поширення хвиль на поверхні контакту та на вільній поверхні. Проведено аналіз коренів дисперсійного співвідношення в залежності від геометричних та фізичних параметрів системи. Зокрема, проаналізовано залежність частот поширення хвиль від хвильового числа без урахування поверхневого натягу.

Проведене дослідження свідчить, що в умовах відсутності поверхневого натягу ($T_1 = T_2 = 0$) відношення густин ρ виступає як визначальний параметр, що керує як кількісними, так і якісними характеристиками хвильових мод у розглядуваній системі. Було виявлено перехід від класичного стану системи з чітко розділеними швидкою поверхневою та повільною внутрішньою модами до режиму їхньої інверсії, що є суттєвим результатом для глибшого розуміння динаміки рідин із значною стратифікацією.

Врахування сил поверхневого натягу розкриває комплексну взаємодію між ефектами стратифікації за густиною та капілярністю. Капілярні сили призводять до істотного зростання хвильових частот і можуть стати домінантним фактором для внутрішніх мод, фактично нейтралізуючи вплив змін густини. Разом з тим встановлено, що відношення густин ρ зберігає свою роль ключового параметра, який визначає якісну структуру мод, включно з можливістю їхньої повної інверсії в умовах сильної стратифікації рідини.

Ключові слова: поширення хвиль, двошарова система, дисперсійне співвідношення.

Матеріал надійшов 08.31.2025



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)

ПАМ'ЯТІ ЮРІЯ ВІКТОРОВИЧА БОДНАРЧУКА (13.10.1955–12.07.2013)

Цього року Боднарчуку Юрію Вікторовичу мало виповнитися 70 років...

Юрій Вікторович Боднарчук народився 13 жовтня 1955 року в Черкасах у родині відомих українських математиків — Віктора Гавриловича Боднарчука та Галини Іванівни Правоторової. Це була родина висококультурних українських інтелігентів-шістдесятників, які виховували свого сина в атмосфері людської гідності, справедливості та любові до України.

Батько — Віктор Гаврилович Боднарчук, кандидат фізико-математичних наук (1965), математик, один із засновників теорії абстрактних автоматів. Закінчив Київський університет (1955), працював в Інституті кібернетики АН УРСР, завідував лабораторією математичного забезпечення, розробив метод аналізу систем рівнянь в алгебрі подій (метрика Боднарчука). Разом із Л. Калужніним встановив зв'язок між алгебрами Поста та Краснера (відповідність Галуа). Був керівником розробки математичного забезпечення для ЕОМ «МИР-2» — одного з перших прообразів персональних комп'ютерів з алгоритмічною мовою «Аналітик». У 1968 р. став співорганізатором «київського листа» — протесту української інтелігенції проти закритих політичних процесів, за що зазнав переслідувань і був звільнений з роботи.

Атмосфера інтелектуальної свободи, моральної стійкості та гуманізму в родині мала визначальний вплив на формування світогляду Юрія Вікторовича. Йому були властиві глибокий патріотизм, принциповість у питаннях справедливості, скромність і щире ставлення до людей.

У 1972 р. Юрій Вікторович закінчив середню школу й вступив на механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Тараса Шевченка, який закінчив у 1977 р. зі спеціалізацією з алгебри та математичної логіки. Після закінчення університету працював у Українському науково-дослідному гідрометорологічному інституті (УкрНДГМІ), де розпочав свою наукову діяльність. У 1981–1984 рр. навчався в аспірантурі на кафедрі алгебри того ж університету під керівництвом видатного алгебраїста Лева Аркадійовича Калужніна.

У 1985 р. Юрій Вікторович захистив кандидатську дисертацію «Автоморфізми нестандартних вінцевих добутків груп». З 1985 до 1990 р. продовжував роботу в УкрНДГМІ на посаді наукового співробітника.

Педагогічну діяльність розпочав у 1990 р. у Вінницькому державному педагогічному інсти-

туті (згодом — Вінницький педагогічний університет ім. М. Коцюбинського). З 1994 р. і до кінця життя вся його наукова й викладацька діяльність була пов'язана з Національним університетом «Києво-Могилянська академія». Він став першим штатним співробітником кафедри фізико-математичних наук департаменту природничих наук, а з 1997 р. заснував кафедру математики департаменту інформаційних технологій (нині — кафедра математики факультету інформатики НаУКМА), де працював доцентом, професором і з 2000 р. — завідувачем кафедри.

У 2004 р. захистив докторську дисертацію «Нескінченновимірні алгебраїчні групи поліноміальних перетворень афінних просторів», у якій отримав низку важливих результатів щодо будови груп автоморфізмів афінних і кремонівських перетворень. Йому належить доведення максимальності скінченних афінних груп у групі Кремони та опис регулярних автоморфізмів груп блоково-трикутних і блоково-унітрикутних перетворень.

Юрій Вікторович був автором понад 40 наукових праць, навчальних посібників із лінійної алгебри, дискретної математики, математичної логіки та теорії алгоритмів. За підручник «Основи дискретної математики» (у співавторстві з Б. В. Олійник) отримав Премію імені Петра Могили (2009 р.).

Він здійснив значний внесок у розвиток математичної освіти в Україні: у 2007 р. під його керівництвом у НаУКМА відкрито спеціальність «Прикладна математика», а у 2012 р. — магістерську програму з цієї спеціальності.

Окрім наукової діяльності, Юрій Вікторович активно займався організаційною роботою: був членом Вченої ради НаУКМА, спеціалізованої Вченої ради Інституту математики НАН України, членом Київського математичного товариства, редколегій журналів «Наукові записки НаУКМА» та «У світі математики».

Колеги й учні згадують його як надзвичайно доброзичливу, чуйну, інтелігентну людину. Галина Крюкова згадувала: «У нас Юрій Вікторович вів спецкурс на мехматі на кафедрі алгебри. Пам'ятаю, що він не ставив себе вище, а разом з нами начебто вперше читав сучасні статті і намагався розібратися, що до чого (хоча очевидно, що не вперше, бо він же цей список статей на вибір пропонував). Студенти з першого курсу для нього вже були на “Ви” і “колеги”. В спілкуванні з ним кожен з нас відчував, що ми не

чергова “маса” студентів, а кожен — особистість. Значно пізніше я приїхала якось до Сергія Миколайовича в Могилянку (він був моїм опонентом на захисті кандидатської), Юрій Вікторович мене впізнав, почав розпитувати, що до чого, як справи, і тоді ж запропонував приєднатися до кафедри. Хто його знає, як би склалося б моє життя, якби не... Пам’ятаю, що зазвичай Юрій Вікторович був у своєму кабінеті в третьому корпусі, здається, 223 кімната, не пам’ятаю

точно. Але точно запам’яталося, що ще рік-два після його смерті ловила себе на думці, що от зараз якщо не розберусь, то побіжу в третій корпус в нього просити допомоги, настільки це було звично, що в будь-якій незрозумілій ситуації до нього можна побігти і отримати допомогу...».

Професор Юрій Вікторович Боднарчук назавжди залишиться в пам’яті як видатний математик, педагог і Людина великої духовної шляхетності.

Колектив кафедри математики

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Авдеєнко Іван Максимович — магістр ОНП «Прикладна математика» Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: економетрика, прогнозування ланцюгів поставок; умовна оптимізація, аналітика даних. Orcid ID: 0009-0006-2347-9108.

Авраменко Ольга Валентинівна — доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна, старший науковий співробітник інституту природничих та технологічних наук, університет Вітовта Великого, Каунас, Литва. Сфера наукових інтересів: математичне моделювання, хвильовий рух у рідинах, символічне обчислення, динамічні системи, фізично інформовані нейронні мережі (PINNs). Orcid ID: 0000-0002-7960-1436.

Бурдим Анастасія Андріївна — випускниця бакалаврату, факультет інформатики, Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: фінансова математика, аналітика, аналіз даних. Orcid ID: 0009-0008-2287-731X.

Гончаренко Юрій Вікторович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри обчислювальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: чисельні методи паралельних обчислень, функціональний аналіз. Orcid ID: 0009-0000-1183-755X.

Гур'єв Василь Олексійович — аспірант третього року навчання ОНП «Прикладна математика» Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна. Сфера наукових інтересів: математичне моделювання. Orcid ID: 0009-0002-0954-7515.

Данилюк Євгенія Андріївна — випускниця бакалаврату, факультет інформатики, Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: фінансова математика, аналітика, аналіз даних. Orcid ID: 0009-0005-2402-5645.

Демідов Валерій Вікторович — викладач кафедри комп'ютерних наук та програмної інженерії Приватного вищого навчального закладу «Європейський університет», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: математичне моделювання, програмування. Orcid ID: 0009-0006-7519-3494.

Дрінь Світлана Сергіївна — кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна, Університет Еребру, Еребру, Швеція. Сфера наукових інтересів: економетрика, прогнозування часових рядів, прогнозування ланцюгів поставок; оптимізація в умовах невизначеності; системи підтримки рішень, аналітика даних. Orcid ID: 0000-0002-5576-3756.

Журавльова Анастасія Дмитрівна — магістр ОНП «Прикладна математика» Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: економетрика, поточне прогнозування, аналітика даних. Orcid ID: 0009-0002-6357-758X.

Захарійченко Юрій Олексійович — кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: методи стохастичної оптимізації, стохастичне моделювання, якісна теорія диференціальних рівнянь. Orcid ID: 0009-0004-7741-2668.

Кашпіровський Олексій Іванович — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: функціональний аналіз, чисельні методи. Orcid ID: 0009-0006-8509-4772.

Компан Сергій Володимирович — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інтернет-технологій Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій, Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: бази даних, бі-матричні ігри, машинне навчання. Orcid ID: 0009-0004-0518-1311.

Крюкова Галіна Віталіївна — кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: економетрика, прогнозування часових рядів, поточне прогнозування, аналітика даних. Orcid ID: 0000-0002-5558-0976.

Ляшко Віктор Сергійович — аспірант Інституту кібернетики НАНУ ім. В. М. Глушкова, Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: методи оптимізації. Orcid ID: 0000-0003-2647-1188.

Мельник Дмитро Леонідович — випускник бакалаврату, факультет інформатики, Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: методи стохастичної оптимізації, теорія ймовірностей, програмне моделювання. Orcid ID: 0009-0004-3129-8708.

Митник Юрій Васильович — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: функціональний аналіз, операторно-диференціальні рівняння. Orcid ID: 0009-0003-1849-7764.

Нарадовий Володимир Володимирович — кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних та цифрових технологій Центральноукраїнського державного університету імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна. Сфера наукових інтересів: математичне моделювання, чисельні та асимптотичні методи, сучасні CAS та програмування. Orcid ID: 0000-0001-5187-8831.

Романюк Вадим Васильович — доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформаційних систем та технологій Вінницького торговельно-економічного інституту Державного торговельно-економічного університету, Вінниця, Україна. Сфера наукових інтересів: теорія ігор, чисельні методи оптимізації, машинне навчання. Orcid ID: 0000-0001-9638-9572.

Сарана Максим Петрович — кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: машинне навчання, теорія ігор. Orcid ID: 0000-0002-0052-8513.

Тимошенко Андрій Анатолійович — доктор філософії, асистент кафедри обчислювальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: різницеві методи. Orcid ID: 0000-0002-8884-9054.

Тимошкевич Лариса Миколаївна — кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: алгебра, теорія графів, матричний аналіз, функціональний аналіз. Orcid ID: 0009-0001-4395-845X.

Федоровська Катерина Пилипівна — магістр історії, старший викладач кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: історія математики та періодичних наукових видань, підґрунтя математичних інновацій. Orcid ID: 0009-0009-2465-5435.

Чернявська Карина Сергіївна — випускниця бакалаврської програми за спеціальністю «Прикладна математика» Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: теорія графів. Orcid ID: 0009-0004-9353-9036.

Чорней Руслан Костянтинівич — кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: керовані випадкові поля, оптимізація. Orcid ID: 0000-0003-3866-8893.

Щестюк Наталія Юріївна — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна. Сфера наукових інтересів: методи стохастичної оптимізації, стохастичне моделювання, оцінювання опціонів. Orcid ID: 0000-0002-7652-8157.

NOTES ABOUT AUTHORS

Ivan Avdieienko — Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine. Research interests: econometrics, supply-chain forecasting; constrained optimization, data analytics. Orcid ID: 0009-0006-2347-9108.

Olga Avramenko — Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine, Senior Researcher at the Research Institute of Natural and Technological Sciences, Vytautas Magnus University, Kaunas, Lithuania. Research interests: mathematical modelling, wave motion in fluids, symbolic computing, dynamical systems, physics-informed neural networks (PINNs). Orcid ID: 0000-0002-7960-1436.

Anastasiia Burdym — Bachelor's graduate, Faculty of Informatics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine. Research interests: financial mathematics, analytics, data analysis. Orcid ID: 0009-0008-2287-731X.

Karyna Cherniavska — graduate of the bachelor's program in the specialty "Applied mathematics", National University of Kyiv-Mohyla Academy. Research interests: graph theory. Orcid ID: 0009-0004-9353-9036.

Ruslan Chornei — Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine. Research interests: applied statistics; demand modeling; inventory and assortment analytics; business forecasting; supply-chain performance metrics and data analytics. Orcid ID: 0000-0003-3866-8893.

Yevheniia Danyliuk — Bachelor's graduate, Faculty of Informatics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine. Research interests: financial mathematics, analytics, data analysis. Orcid ID: 0009-0005-2402-5645.

Valerii Demidov — a lecturer of the Department of Computer Science and Software Engineering, Private Higher Educational Institution European University, Kyiv, Ukraine. Research interests: mathematical modeling, programming. Orcid ID: 0009-0006-7519-3494.

Svitlana Drin — Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine. Research interests: econometrics, time series forecasting, supply-chain forecasting; optimization under uncertainty; decision-support systems, data analytics. Orcid ID: 0000-0002-5576-3756.

Kateryna Fedorovska — Master of History, Senior Lecturer of the Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy. Research interests: history of mathematics and periodicals, the foundations of mathematical innovations. Orcid ID: 0009-0009-2465-5435.

Yuriy Honcharenko — PhD, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics of Taras Shevchenko National University, Kyiv, Ukraine. Research interests: numerical methods of parallel computing, functional analysis. Orcid ID: 0009-0000-1183-755X.

Vasyl Huriev — a third-year postgraduate student of the educational and scientific program "Applied Mathematics" at Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropyvnytskyi, Ukraine. Research interests: mathematical modeling. Orcid ID: 0009-0002-0954-7515.

Oleksii Kashpirovskiy — PhD, Associate Professor of the Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine. Research interests: functional analysis, numerical methods. Orcid ID: 0009-0006-8509-4772.

Serhii Kompan — Candidate of Physics and Mathematics, Docent of the Department of Internet Technologies, State University of Communication and Informational Technologies, Kyiv, Ukraine. Research interests: databases, bi-matrix games, machine learning. Orcid ID: 0009-0004-0518-1311.

Galyna Kriukova — Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine. Research interests: time series forecasting, nowcasting, data analytics. Orcid ID: 0000-0002-5558-0976.

Viktor Liashko — a postgraduate student at the Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences, Kyiv, Ukraine. Research interests: optimization methods. Orcid ID: 0000-0003-2647-1188.

Dmytro Melnyk — Bachelor's degree graduate, Faculty of Informatics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine. Research interests: stochastic optimization methods, probability theory, software modeling. Orcid ID: 0009-0004-3129-8708.

Yuri Mytnyk — PhD, Associate Professor of the Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine. Research interests: functional analysis, operator-differential equations. Orcid ID: 0009-0003-1849-7764.

Volodymyr Naradovyi — PhD, Associate Professor of the Department of Information and Digital Technologies, Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropyvnytskyi, Ukraine. Research interests: mathematical modeling, numerical and asymptotic methods, modern CAS and programming. Orcid ID: 0000-0001-5187-8831.

Vadym Romanuk — Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Information Systems and Technologies of the Vinnytsia Institute of Trade and Economics of the State University of Trade and Economics. Research interests: game theory, numerical optimization methods, machine learning. Orcid ID: 0000-0001-9638-9572.

Maksym Sarana — Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine. Research interests: machine learning, game theory. Orcid ID: 0000-0002-0052-8513.

Nataliya Shchestyuk — PhD, Associate Professor of the Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine. Research interests: stochastic optimization methods, stochastic modeling, option valuation. Orcid ID: 0000-0002-7652-8157.

Andriy Tymoshenko — PhD, Assistant Professor of the Department of Computational Mathematics of Taras Shevchenko National University, Kyiv, Ukraine. Research interests: differential methods. Orcid ID: 0000-0002-8884-9054.

Larysa Tymoshkevych — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy. Research interests: algebra, graph theory, matrix analysis, functional analysis. Orcid ID: 0009-0001-4395-845X.

Yuri Zakharyichenko — Ph.D, Senior Lecturer of the Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine. Research interests: stochastic optimization methods, stochastic modeling, qualitative theory of differential equations. Orcid ID: 0009-0004-7741-2668.

Anastasiia Zhuravlova — Department of Mathematics, National University of Kyiv-Mohyla Academy, Kyiv, Ukraine. Research interests: econometrics, nowcasting, data analytics. Orcid ID: 0009-0002-6357-758X.

ЗМІСТ

<i>Федоровська К. П.</i> Готфрід Лейбніц і створення диференціального числення	3
<i>Гончаренко Ю. В., Ляшко В. С., Тимошенко А. А., Чорней Р. К.</i> Про розв'язність задачі пошуку нерухомої точки відображення в просторах багатовимірних послідовностей	6
<i>Кашипровський О. І., Митник Ю. В.</i> Про деякі властивості майже періодичних функцій	10
<i>Тимошкевич Л. М., Чернявська К. С.</i> Спектральні відновлювальні числа графів $C_3 + e$ та $K_4 - e$	19
<i>Дрінь С. С., Журавльова А. Д., Крюкова Г. В.</i> Поточне прогнозування ВВП за допомогою моделей факторів зі змішаною частотою для українських регіонів	26
<i>Дрінь С. С., Авдєєнко І. М., Чорней Р. К.</i> Ітеративна оптимізація попиту з використанням методу дискретних функціональних частинок	32
<i>Мельник Д. Л., Щестюк Н. Ю., Захарійченко Ю. О.</i> Стохастичний експеримент для деяких узагальнень проблеми секретаря	40
<i>Бурдим А. А., Данилюк Є. А., Щестюк Н. Ю.</i> Портфельна оптимізація для реальних даних: підходи та виклики	46
<i>Романюк В. В.</i> Оптимальність останнього моменту часу в рівномірній однокульовій безшумній дуелі з масштабованою експоненціально-опуклою влучністю	56
<i>Авраменко О. В., Компан С. В., Сарана М. П.</i> Машинне навчання на основі PINN для моделювання внутрішніх хвиль у напівнескінчених рідинах	62
<i>Нарадовий В. В., Гур'єв В. О., Демідов В. В.</i> Аналіз умов поширення хвиль у двошаровій гідродинамічній системі з вільною поверхнею	69
Пам'яті Юрія Вікторовича Боднарчука	74
Відомості про авторів	76

CONTENTS

<i>K. Fedorovska.</i> Gottfried Leibniz and the creation of differential calculus	3
<i>Y. Honcharenko, V. Lyashko, A. Tymoshenko, R. Chornei.</i> On the solvability of the fixed point problem for mappings in spaces of multidimensional sequences	6
<i>O. Kashpirovskiyi, Yu. Mytnyk.</i> On some properties of almost periodic functions	10
<i>L. Tymoshkevych, K. Cherniavska.</i> Spectral reconstruction numbers of graphs $C_3 + e$ and $K_4 - e$..	19
<i>S. Drin, A. Zhuravlova, G. Kriukova.</i> Nowcasting Regional GDP with Mixed-Frequency Factor Models for Ukrainian Regions	26
<i>S. Drin, I. Avdieienko, R. Chornei.</i> Iterative demand optimization using the discrete functional particle method	32
<i>D. Melnyk, N. Shchestyuk, Y. Zakhariichenko.</i> The stochastic experiment for some generalizations of the secretary problem	40
<i>A. Burdym, Y. Danyliuk, N. Shchestyuk.</i> Portfolio optimization for real data: approaches and challenges	46
<i>V. Romanuke.</i> Last time moment optimality in uniform 1-bullet silent duel with scaled exponentially-convex accuracy	56
<i>O. Avramenko, S. Kompan, M. Sarana.</i> PINN-based machine learning for modeling internal waves in semi-infinite fluids	62
<i>V. Naradovyi, V. Huriev, V. Demidov.</i> Analysis of wave propagation conditions in a two-layer hydrodynamic system with a free surface	69
In memory of Yuriy Viktorovych Bodnarchuk	74
Notes about Authors	76